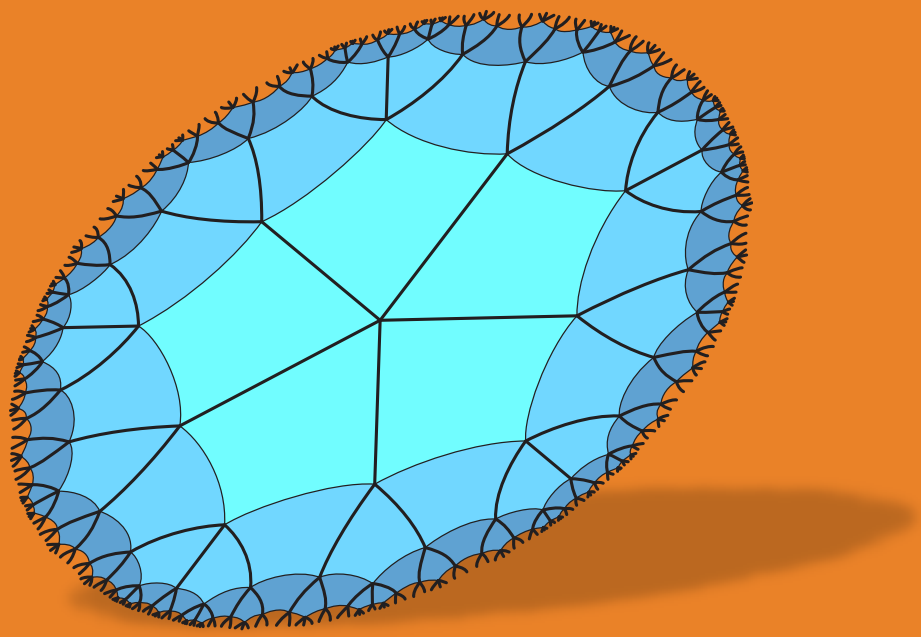
# Dimenziók

Matematikai Közlemények

XI. kötet



SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság
2023

# Dimenziók

## Matematikai Közlemények

## XI. kötet

**SOE FMK Informatikai és Matematikai Intézet**

**Soproni Tudós Társaság**

**2023**

A **Dimenziók − Matematikai Közlemények** 2013 óta évente egyszer megjelenő tudományos folyóirat. A kéziratokat a szerkesztőbizottság tagjai, vagy független bírálók véleményezik, de a tartalomért a szerzők a felelősek.

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
Nagy Zsolt (címzetes egyetemi docens, középiskolai tanár)
Németh László (SOE, egyetemi docens)
Szalay László (SOE, egyetemi tanár)

SZERKESZTŐ:
Németh László

TECHNIKAI SZERKESZTŐ:
Németh László

KIADÓ:
Soproni Egyetem
Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar
Informatikai és Matematikai Intézet
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.
és
MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.

Elektronikus elérhetőség: http://matematika.emk.uni-sopron.hu/dimenziok
HU ISSN 2064-2172

© Szabadon terjeszthető a forrás megjelölésével.

# Tartalomjegyzék

A Boerdijk-Coxeter tetrahélixről és általánosításairól ..... 3

Az általánosított oktoniók és a vektor-mátrixok algebrája ..... 11

Speciális meteorológiai adathalmaz statisztikai vizsgálata ..... 21

Többváltozós lineáris regresszió gyakorlati alkalmazásai STATISTICA13 programcsomag segítségével ..... 33

Lakat van a számON(?) avagy a logikai játékok alkalmazása a technikumi oktatásban .. 45

A szintfelmérő dolgozat mint mérőeszköz: célkitűzések, eredmények és következtetések ..... 57

Matematika tanár szakos hallgatók oktatási készségeinek hallgatóközpontú fejlesztése mikrotanítási környezetben ..... 67

Az ellipszis-rögzítés általános esete ..... 71

Érdekes matematikai problémák modellezése számítógéppel középiskolásoknak ..... 77

doi:10.20312/dim.2023.01

# A Boerdijk-Coxeter tetrahélixről és általánosításairól

**Talata István**
BGE Külkereskedelmi Kar, Budapest,
Óbudai Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest
talata.istvan@uni-bge.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A Boerdijk-Coxeter tetrahélix szabályos tetraédereknek egy olyan, mindkét irányban végtelen sorozata, amelyben a tetraéderek pakolást alkotnak, a szomszédos tetraédereknek közös lapjuk van, és a pontosan egyetlen tetraéderhez tartozó élek három olyan, egyetlen hengerfelületen elhelyezkedő csavarvonalba beírt térbeli sokszögvonalat határoznak meg, amely csavarvonalak egymás elforgatottjai. Ezt a konstrukciót kétféleképpen általánosítjuk: szabályos tetraéder helyett más poliédert is megengedve, az egymást követő elemekre adott illeszkedési szabállyal; valamint közel szabályos tetraéderek záródó láncaira.

ABSTRACT. The Boerdijk-Coxeter tetrahelix is a sequence of regulars tetrahedra that is infinite in both directions, it forms a packing, any two consecutive tetrahedra shares a common face, and the edges which correspond to exactly one tetrahedron form three spatial polygons inscribed into helices which are rotated copies of each other and they lie on a cylinder. This construction is generalized in two ways: instead of a regular tetrahedron, other polyhedron may be used, with some adjacency rule for consecutive elements; and for almost regular tetrahedra, forming a finite closed chain.

## 1. Bevezetés

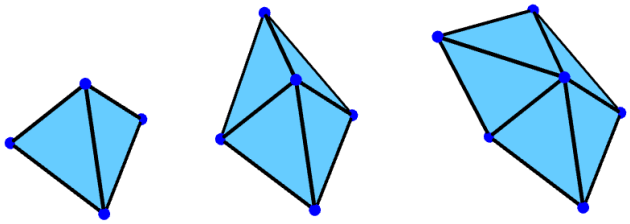
A Boerdijk-Coxeter tetrahélix (ld. [1], [2], [4], [5]) szabályos tetraédereknek egy olyan, mindkét irányban végtelen sorozata, amely

- a 3-dimenziós euklideszi térben egy pakolást alkot,
- bármely két, egymást követő elemének metszete egy közös lapjuk,
- bármely három, egymást követő elemének metszete egy közös élük,
- bármely négy, egymást követő elemének metszete egy közös csúcsuk,
- bármely öt, egymást követő elemének metszete üres halmaz.

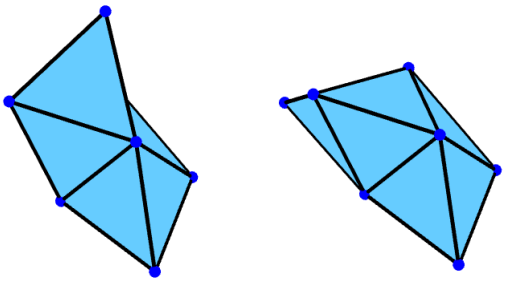
A következőkben röviden csak tetrahélixnek hívjuk majd ezt a tetraéder-sorozatot, illetve ezt olykor azonosítjuk az uniójával, amely egy végtelen sok csúcsot, élt, és lapot tartalmazó, nemkonvex poliéder. A tetrahélix csúcsait és éleit a tetrahélixet alkotó tetraéder-sorozat csúcsai, ill. élei alkotják.

KULCSSZAVAK. tetrahélix, pakolás, szabályos tetraéder, majdnem szabályos tetraéder, csavarvonal, 4-dimenziós szabályos politóp.
KEYWORDS. tetrahelix, packing, regular tetrahedron, almost regular tetrahedron, helix, 4-dimensional regular polytope.

Ha elkezdünk felépíteni egy tetrahélixet, akkor három, közös éllel rendelkező tetraéder egymás utáni kiválasztása után (ld. 1. ábra), a sorozat negyedik elemére két lehetőségünk van (ld. 2. ábra). A negyedik tetraéder kiválasztása után az egész tetraéder-sorozat már egyértelműen folytatható mindkét irányban. A negyedik tetraéder választásától függően két, egymással egybevágó tetraéder-pakolás adódik, amelyek egymásnak egy síkra vonatkozó tükörképei, de emiatt egymásba mozgathatóság erejéig két különböző tetrahélixről beszélhetünk.



**1. ábra. A tetrahélix legfeljebb három, egymást követő eleme alkotta konfigurációk**



**2. ábra. A tetrahélix négy, egymást követő elemére adható két lehetséges konfiguráció**

Mivel a tetrahélix definíciójában nincs kitüntetett szerepe egyetlen tetraéderének sem, ezért bármely eleméből kiindulva ugyanaz a tetrahélix adódik. Így bármely két elemére kell, hogy legyen olyan mozgása a térnek, amely az egyik elemet a másikba viszi, miközben a tetrahélixet önmagába viszi. Vegyünk egy ilyen mozgást, például a tetrahélix két egymást követő elemére. Ismert, hogy minden mozgás, így ez is előáll csavarmozgásként (azaz egy tengely körüli forgatás, és a tengellyel párhuzamos irányú eltolás egymás utáni alkalmazásaként), ld. [3].

Ezért a csavarmozgás tengelyét választhatjuk egy olyan hengerfelület tengelyének, amelyen rajta fekszik a tetrahélix elemeinek összes csúcsa. Általában egy poliéder csúcsai nem egyetlen hengerfelületen helyezkednek el egy csavarmozgás során, de jelen esetben, a 2. fejezetben belátottakból következik majd, hogy a tetrahélix minden csúcsa előáll egyetlen csúcsból, ugyanazon csavarmozgás (vagy annak az inverzének) egymás utáni alkalmazásai által, ezért helyezkedik el az összes csúcs egyetlen hengerfelületen.

A csúcsoknak a tengelyre vett merőleges vetületei egyenlő hosszúságú szakaszokra bontják fel a tengelyt, és bármely vetületpontból minden harmadik rákövetkező vetületpontot véve (mindkét irányban), a hozzájuk tartozó csúcspontok olyan tetraéder-élek sorozatával vannak összekötve, melyek a tetrahélixnek csak egyetlen tetraéderében fordulnak elő. Ezek összességében három olyan térbeli sokszögvonalat alkotnak, amelyek egy-egy, a hengerfelületre írt csavarvonalnak a beírt sokszögvonalai, és ezek a csavarvonalak egymás elforgatottjai (ld. 3. ábra).

Egy hengerfelületre írt csavarvonalnak az a tulajdonsága, hogy bármely pontjában a hengert az érintőegyenese végig ugyanakkora szöget zár be a henger tengelyével, a csavarvonalba beírt sokszög oldalai pedig, hogy ha ugyanakkora hosszúságúak, akkor mind ugyanakkora szöget zárnak be a csavarvonal tengelyével.

A tetrahélix két egymást követő elemének a tengelynél mért forgási szöge 360 foknak egy irracionális kifejezése, ezért nincs olyan eltolás, amely a tetrahélixet önmagába vinné, azaz a tetrahélix eltolásra nem periodikus.

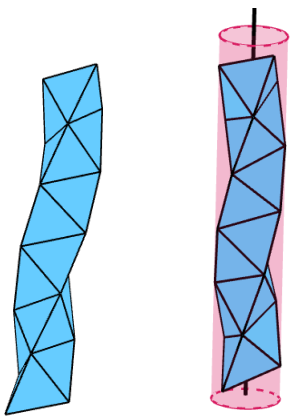
A további fejezetekben először a tetrahélix tulajdonságait vesszük sorra (ld. a 2. fejezetet), majd kétféle általánosítását definiáljuk. Szabályos tetraéder helyett más konvex, vagy nemkonvex poliéderre egy illeszkedési szabállyal definiálhatunk analóg pakolást (ld. a 3. fejezetet). Végezetül a tetrahélix egy véges változatával fogunk foglalkozni, amikor véges sok majdnem szabályos tetraéderből álló eleme után záródik a poliédersorozat, és a csúcsok egy tórusz felületén találhatók – ehhez a motivációt a 4D szabályos testek adják (ld. 4. fejezetet).

## 2. A tetrahélix tulajdonságai

A tetrahélix egymást követő elemeinek konstruálásához mindig 1-1 új csúcs felvétele szükséges, amely az előző elemének (amely egy szabályos tetraéder) egyetlen szóba jöhető háromszöglapjával együtt egy szabályos tetraédert határoz meg (azaz a konvex burkuk szabályos tetraéder).

Így a tetrahélix tetraéder-sorozata azonosítható a csúcsainak egy (mindkét irányban végtelen) sorozatával. Könnyen belátható, hogy a tetrahélix elemeit pontosan azok a tetraéderek alkotják, amelyek a csúcsainak a sorozatában négy, egymást követő csúcs konvex burkaként állnak elő, ugyanis pontosan így biztosítható, hogy a tetrahélix elemeit alkotó tetraéder-sorozatban 2, 3, 4, ill. 5 egymást követő elem metszete a tetrahélix 1. fejezetbeli definíciójában szereplő feltételeknek eleget tegyen.

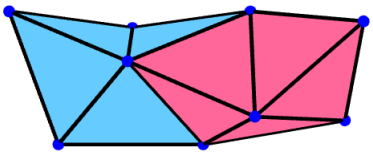
Tegyük fel, hogy $\dots, V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ a csúcsok sorozata. Tekintsük azt a $\tau$ egybevágóságot, amely a $V_1V_2V_3V_4$ tetraédert a $V_2V_3V_4V_5$ tetraéderbe viszi úgy, hogy $\tau(V_i) = V_{i+1}$, ha $1 \leq i \leq 4$. Ekkor ez egy csavarmozgás, amely a tetrahélixet önmagába viszi. A tengelye könnyen megszerkeszthető, mivel az a $\overrightarrow{V_1V_2}$, $\overrightarrow{V_2V_3}$, $\overrightarrow{V_{34}}$ egységvektorokkal ugyanakkora szöget zár be. Így ha egy közös kezdőpontba eltoljuk a három vektort, akkor a kezdőpontjuk és a végpontjaikon átmenő kör középpontja meghatározza a tengely irányát. Az eddigiekből az is következik, hogy ha $i$ és $j$ két tetszőleges egész szám, $i < j$, akkor $V_j$ előáll, mint $V_i$-nek a képe, ha a $\tau$ csavarmozgást $(j - i)$-szer alkalmazzuk rá, azaz $V_j = \tau^{j-i}(V_i)$.



**3. ábra. A tetrahélix és körülírt hengere**

Kiszámítható, hogy ha egységnyi élhosszú szabályos tetraéderekből áll a tetrahélix, akkor az egymást követő csúcsainak a tengelyre vett vetületei $1/\sqrt{10} \approx 0{,}3162$ távolságra vannak egymástól, míg az egymást követő csúcsoknak a tengellyel vett síkjai által bezárt szöge (azaz a csavarmozgás forgásszöge) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 131{,}81°$, a hengerfelület alapkörének sugara pedig $3\sqrt{3}/10 \approx 0{,}5196$ (ld. [2]).

Hívjunk „csónak”-nak egy háromelemű szabályos tetraédersorozat uniójából álló alakzatot, ha a sorozat pakolás, bármely két egymást követő elemének metszete egy közös lapjuk, és így a három tetraéder metszete egy közös élük. Egy csónaknak két olyan csúcsa van, ahol 5 darab háromszöglapja találkozik, ezek egy olyan éllel vannak összekötve, amelynél a poliéder konkáv. A konkáv élre illeszkedő két háromszöglapot hívjuk a csónak tetejének, a csónak tetejéhez éllel illeszkedő 4 darab háromszöglapot hívjuk a csónak oldalának, a maradék két háromszöglapot pedig a csónak aljának. Válasszunk ki két olyan lapot a csónak oldalából, melyeknek nincs közös csúcsuk, számozzuk meg ezeket az 1-es, ill. 2-es számokkal. Ekkor a csónak összes elmozgatottján is hívhatunk egy-egy lapot 1-es, ill. 2-es számozásúnak, a csónak megfelelő számozású lapjainak elmozgatottjait.



**4. ábra. Két, egymáshoz illeszkedő „csónak”**

A tetrahélixet a következő illeszkedési szabály is definiálja: egy csónak két elmozgatott példányát úgy illesztjük össze, hogy a belsejeik diszjunktak legyenek, és a sorozatban korábbi elem 2-es számú lapjához illeszkedjen a rákövetkező elem 1-es számú lapja olyan módon, hogy a két csónak tetejének legyen közös éle (ld. 4. ábra).

Könnyen belátható, hogy ha olyan egy csónak elmozgatott példányainak a (mindkét irányban végtelen) sorozata, hogy az egymást követő elemeire fennáll ez az illeszkedési szabály, akkor is tetrahélixet kapjuk (méghozzá a csónakok uniója egy olyan tetrahélix, amelyet a csónakokat alkotó tetraéderek határoznak meg).

## 3. Poliédersorozatok illeszkedési szabályokkal

Szabályos tetraéder helyett más, nem feltétlenül konvex, 3-dimenziós poliéder esetén is lehet a tetrahélixhez hasonló konstrukciót definiálni.

Ekkor az adott $P$ poliéder két, egymással egybevágó lapját, $L_1$-et, és $L_2$ -t, felcímkézzük, az 1-es és 2-es számokkal, valamint megadjuk a térnek egy olyan $\tau$ mozgását (pl. úgy, hogy az 1-es számú lap egyes csúcsait az egybevágóság a 2-es számú lap mely csúcsaiba viszi), amely esetén az 1-es számú lapnak a 2-es számú lap a képe, és amely a poliédert egy olyan elmozgatott poliéderbe viszi át, amelynek az eredeti poliéderrel vett metszete pontosan a két poliéder közös lapja, azaz $\tau(L_1) = L_2$, és $\tau(P) \cap P = L_2$. (Megjegyzendő, hogy a $\tau$ mozgást már három, nem egy egyenesen fekvő pont, és azok képe egyértelműen meghatározza.)

A $P$ poliéderre tetszőleges $\pi$ mozgást alkalmazva, a $\pi(P)$ elmozgatott poliéderen is hívhatunk egy-egy lapot 1-es, ill. 2-es számozásúnak (a poliéder megfelelő számozású lapjainak elmozgatottjait, azaz $\pi(L_1)$-et, ill. $\pi(L_2)$-t). Ezáltal a következőképp definiálhatjuk a $P$

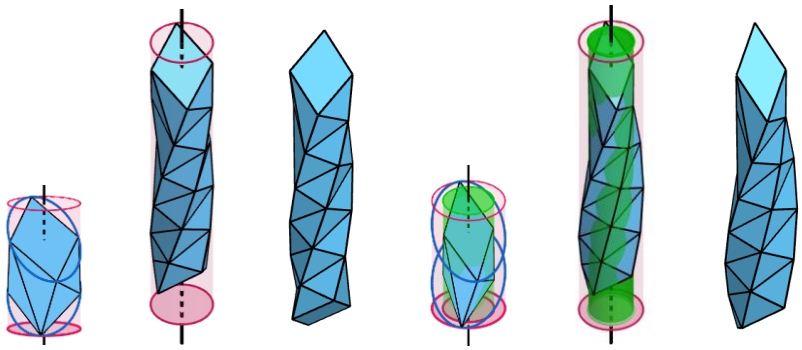
poliéder két elmozgatottjára egy illeszkedési szabály teljesülését: a $\pi_1$ és $\pi_2$ mozgások esetén a $\pi_1(P)$ és $\pi_2(P)$ poliéderekre pontosan akkor teljesül az illeszkedési szabály, ha $\pi_2 = \pi_1 \circ \tau$, ahol $\tau$ az a mozgás, amelyre az előző bekezdésben megadott feltételek teljesülnek. Ez garantálja, hogy $\pi_2(L_1) = \pi_1(L_2)$ és $\pi_2(P) \cap \pi_1(P) = \pi_1(L_2)$ is fennálljanak.

Ezzel az illeszkedési szabállyal definiálhatunk egy (mindkét irányban végtelen) $\mathcal{S}$ poliédersorozatot, amelynek elemei az adott poliéder elmozgatott példányai, és két egymást követő elem esetén azokat úgy illesztjük össze, hogy a belsejeik diszjunktak legyenek, és a sorozatban kisebb indexű elem 2-es számú lapjához illeszkedjen a rákövetkező elem 1-es számú lapja, az előbbi az illeszkedési szabályban megadott módon.

A továbbiakban feltesszük, hogy az ilyen módon definiált (mindkét irányban végtelen) poliédersorozat egy pakolást alkot, mert leginkább ezzel az esettel szeretnénk foglalkozni, ekkor a leglátványosabb a tetrahélixhez való hasonlósága.

Ha az $L_1$ lap egyik, mondjuk $V_1$ jelű csúcsát az $L_2$ lapbeli $\tau(V_1)$ csúccsal a $P$ poliédernek egy éle köti össze, akkor az illeszkedési szabály alapján készített $\mathcal{S}$ poliédersorozatban a $\tau^i(V_1)$ csúcsok (ahol $i$ tetszőleges egész szám) egy csavarvonal beírt sokszögének az egymást követő csúcsai, melynek oldalait az $\mathcal{S}$ poliédersorozat bizonyos élei alkotják – ez a csavarvonal egy olyan hengerfelületen fekszik, melynek a tengelye a $\tau$ csavarmozgás tengelye. Az ilyen típusú csavarvonalak fekhetnek ugyanazon a hengerfelületen, vagy akár különböző hengerfelületeken is.

Erre mutatunk most két példát (ld. 5. ábra): egy hengernek egy ferde síkmetszetébe (amely egy ellipszis) egy beírt négyszöget rajzolunk, majd azt forgatva eltoljuk a henger tengelyének irányában úgy, hogy diszjunkt legyen a két síkmetszet (az eredeti, és a forgatva eltolt), és a $P$ poliédernek az eredeti négyszög, valamint a forgatva eltolt példányának a konvex burkát vesszük, mozgásnak pedig a már említett forgatva eltolást. Ekkor az $\mathcal{S}$ poliédersorozat négy olyan csavarvonalhoz tartozó beírt sokszögvonalat tartalmaz, amelyek ugyanazon a hengerfelületen helyezkednek el.

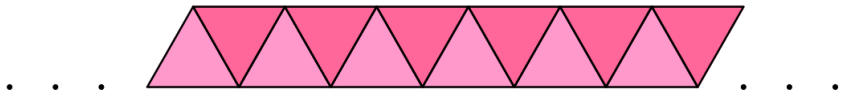


**5. ábra. Példák egyetlen, ill. két hengerfelületen elhelyezkedő csavarvonalakra, poliéderek illeszkedési szabálya által definiált poliédersorozat esetén (poliéder, henger(ek) és a rájuk írt csúcsokkal rendelkező poliédersorozat, poliédersorozat ábrázolásával mindkét esetben)**

Ezután változtatunk kicsit ezen a konstrukción úgy, hogy a henger ferde síkmetszetébe nem beírt négyszöget, hanem olyan négyszöget rajzolunk, amelynek két csúcsa a hengerfelületen helyezkedik el, a másik két csúcsa pedig egy kisebb sugarú olyan henger felületén, amelynek ugyanaz a tengelye, mint az eredeti hengernek. Ekkor az $\mathcal{S}$ poliédersorozat négy csavarvonalhoz tartozó beírt sokszögvonalat tartalmaz, amelyek közül két csavarvonal az eredeti hengerfelületen helyezkedik el, a másik két csavarvonal pedig a kisebb sugarú henger felületén.

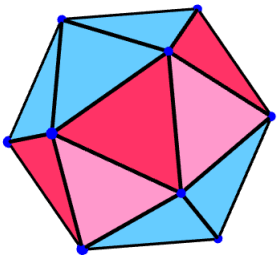
## 4. Majdnem szabályos tetraéderek véges láncolata

A síkban, oldalaikkal egymáshoz illeszkedő szabályos háromszögek pakolása esetén, ha bármely két, egymást követő háromszögnek a metszete egy közös oldaluk, bármely három, egymást követő háromszögnek a metszete egy közös csúcsuk, és bármely négy, egymást követő háromszög metszete üres halmaz, akkor az a háromszögpakolás egyértelműen meghatározott, egy mindkét irányban végtelen háromszögsorozatot alkot (ld. 6. ábra).



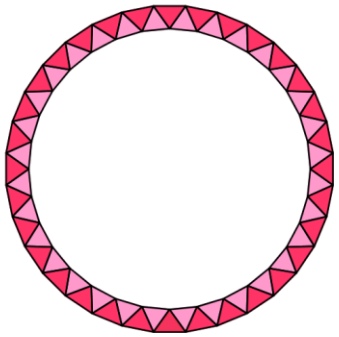
**6. ábra. Szabályos háromszögek végtelen sorozatának egy véges része, adott illeszkedési szabályok esetén**

Azonban a 3-dimenziós térben egy ilyen háromszögpakolás a háromszögek oldalai mentén behajtható, így pl. a szabályos ikozaéder szimmetriasíkja mentén szabályos háromszögeknek egy véges, önmagába záródó láncolata adódik a fenti illeszkedési tulajdonságokkal (ld. 7. ábra).



**7. ábra. Szabályos ikozaéder laphálójában szabályos háromszögek véges láncolata ugyanazokkal az illeszkedési tulajdonságokkal, mint a 6. ábra síkbeli háromszögelrendezése**

Síkban csak torzulásokkal ábrázolható ilyen tulajdonságú alakzat, azaz nem mindegyik háromszög szabályos egy ilyen típusú véges, záródó elrendezésben. Azonban minél több háromszög van a 8. ábrához tartozó elrendezésben, annál közelebbi lehet az alakjuk a nem szabályos háromszögeknek is a szabályos háromszögekéhez. Azzal mérhető, hogy mennyire közeli az alakja egy háromszögnek a szabályos háromszöghöz, hogy mennyire közeli a leghosszabb és legrövidebb oldalának az aránya az 1-hez.



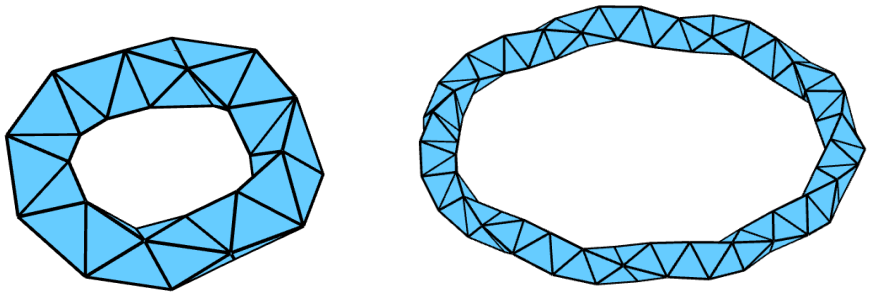
**8. ábra. Majdnem szabályos háromszögek véges, záródó sorozata**

A következőkben a fentieknek 3-dimenziós analogonját konstruáljuk meg a tetrahélix esetében. Ehhez a motivációt a 4-dimenziós szabályos testek adják. Ugyanis, a szimpliciális, (azaz tetraéder hiperlapokkal rendelkező) 4-dimenziós centrálszimmetrikus szabályos konvex testek esetén (a centrálszimmetria megkötésével a szabályos 4-szimplexet kizárjuk), tehát a 16-cella és a 600-cella esetén fennáll, hogy van olyan véges, szabályos tetraéderekből álló hiperlapsorozatuk, amely önmagába záródik (8, ill. 30 tetraéderből állnak), és igaz rá a tetrahélix illeszkedési szabálya: az 1. fejezetbeli definíció feltételei, ahol a 2-5 darab, egymást követő elem metszetére szerepelnek megkötések. Ezek a tetraéderláncok a szabályos 4-dimenziós politóp körülírt gömbjéhez tartozó egy-egy főkör mentén helyezkednek el, és fennáll, hogy a politóp hiperlapjainak halmaza felbomlik ilyen típusú, egymással diszjunkt tetraéderláncokra.

Ezzel a tulajdonsággal szorosan kapcsolatos a Hopf-fibrálás fogalma. A Hopf-fibrálás a 4-dimenziós térbeli 3-dimenziós egységgömbfelületből egy leképezés a 3-dimenziós térbeli 2-dimenziós egységgömbfelületre, melynél a 2-dimenziós egységgömbfelület mindegyik pontjának az inverz képe egy főkör a 3-dimenziós gömbfelületen.

Ha a 3D egységgömbfelületet sztereografikus projekcióval leképezzük a 3-dimenziós térbe (egyetlen pontja, a (0,0,0,1) kivételével), akkor a 2-dimenziós gömbfelület szélességi köreinek (azaz a 3-dimenziós $xyz$-tér $xy$-síkkal párhuzamos köreinek) inverz képei tóruszok lesznek, melyekben az egyes pontok inverz képei ún. Villarceau-körök (azaz olyan körök, melyek a tórusz szimmetriatengelyére nem merőlegesek, és a tengellyel nem egysíkúak). Bármely két ilyen kör egymásba kapcsolódó (más szóval egymásba fűzött, azaz bármelyik kör körlapjába – tehát a körvonal konvex burkába – belemetsz a másik kör). Ennek a tulajdonságnak a diszkrét analogonja, hogy a fentebb említett tetraéderláncok 3D-s vetületei is egymásba kapcsolódók, azaz az egymásba kapcsolódó körökkel topologikusan ekvivalens görbék adódnak, ha a tetraéderláncokat bennük végigfutó olyan egyszerű zárt konvex sokszögvonalakkal helyettesítjük, amelyeknek minden egyes tetraéderrel egy-egy szakasz a metszete (ld. [2]).

Természetesen egy ilyen zárt tetraéderlánc csak torzulásokkal ábrázolható 3D-ben, azaz nem lehet minden tetraédere szabályos. Arra mutatunk egy konstrukciót, hogy hogyan lehet tetszőleges pontossággal majdnem szabályos tetraéderekkel előállítani ilyen tetraédersorozatot.



**9. ábra. Majdnem szabályos tetraéderek véges, záródó sorozatai (n=33, $\varepsilon = 0,409$, és n=96, $\varepsilon = 0,112$)**

Vegyük egy $n$+1 csúcsból álló részsorozatát a tetrahélixnek. Ekkor a tetrahélix tengelyét megfeleltetjük majd egy olyan körnek, amelynek a kerülete megegyezik a tengely hosszával (az első csúcspont tengelyre vett vetületének és az utolsó csúcspont tengelyre vett vetületének a távolságával). Az egymást követő csúcspontok vetületeinek megfelelő pontokat mérjünk fel ezen a körön, ugyanakkora távolságra egymástól. A vetületpontokra merőleges síkokat állítva, azok áthaladnak a kör tengelyén. Pontosan a tetrahélix forgatva eltolásához tartozó forgatási szög egymás utáni többszöröseivel forgassunk el egy ilyen síkon adott kezdeti pontot az egymás utáni merőleges síkokon, és pontosan akkora sugarú síkbeli körökön legyenek rajta ezek a

$P_0, P_1, \dots, P_n$ pontok, mint a tetrahélix hengerfelületének az alapkörének a sugara. Ekkor az utolsó pont ugyanazon a síkon, annak ugyanazon a körén lesz, mint az első. A szögkülönbség $i/n$-edrészével forgassuk vissza a $P_0, P_1, \dots, P_n$ pontsorozat minden pontját, $0 \leq i \leq n$ esetén. Az ezekre a pontokra felépített tetraéderpakolás (4 darab, ciklikusan egymást követő csúcsra illesztünk egy tetraédert) minden egyes tetraédere közeli lesz a szabályos tetraéderhez, ha $n$ elég nagy – olyan értelemben, hogy ha adott egy $\varepsilon > 0$ szám, akkor a leghosszabb és a legrövidebb élek aránya egy tetraéderben kisebb lesz $(1+\varepsilon)$-nál, ha $n > n_0$, megfelelően választott $n_0$ szám esetén. A 9. ábra példáiban n=33 csúcs esetén $\varepsilon = 0{,}409$, és n=96 csúcs esetén $\varepsilon = 0{,}112$ adódik, azaz a zárt tetraéderláncok tetraédereiben a leghosszabb él és legrövidebb él hányadosa kisebb, mint 1,409, ill. 1,112. Érdekes probléma, hogy van-e jobb konstrukció, amellyel az itt ismertetett eljáráshoz képest lényegesen kisebb $\varepsilon$ értékkel készíthető el ugyanannyi majdnem szabályos tetraéder zárt lánca?

## Összefoglaló

A tetrahélix egy olyan érdekes 3-dimenziós alakzat, amely szabályos tetraéderek pakolásaként áll elő, olyan élsorozatokat tartalmazva, amelyek csavarvonalak beírt sokszögvonalai. Ennek kétféle általánosítását vezettük be, illeszkedési szabállyal megadott poliédersorozat, és záródó tetraéderlánc esetén.

## Köszönetnyilvánítás.

Szeretném megköszönni Németh Lászlónak és Szalay Lászlónak, hogy erről a témakörről előadhatott a szerző Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2023-as programjában.

## Irodalomjegyzék

[1] **Boerdijk, A.H.,** Some remarks concerning close-packing of equal spheres, Philips Res. Rep. 7 (1952) 303–313.
[2] Boerdijk–Coxeter helix, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Boerdijk%E2%80%93Coxeter_helix
[3] Chasles' theorem (kinematics), Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Chasles%27_theorem_(kinematics)
[4] **Coxeter, H. S. M.**, Regular Complex Polytopes. Cambridge University Press, 1974. ISBN 052120125X.
[5] **Fuller, R. B.**, Applewhite, E.J. (ed.), Synergetics, Macmillan, 1975.

doi:10.20312/dim.2023.02

# Az általánosított oktoniók és a vektor-mátrixok algebrája

**Péntek Kálmán**
ELTE SEK BDPK
Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban az általánosított Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárással megkonstruáljuk az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ kommutatív és asszociatív algebráját, az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ nem kommutatív, de asszociatív algebráját és az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját.
Minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával, viszont az általánosított oktoniók algebrája nem asszociatív. A probléma megoldására Zorn, M. A. 1931-ben értelmezte a split oktoniók vektor-mátrix reprezentációját. A dolgozat utolsó fejezetében megkonstruáljuk az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktoniók vektor-mátrix reprezentációját.

ABSTRACT. In the paper with the use of generalized Cayley-Dickson process we contruct the commutative and associative algebra of generalized complex numbers $\mathbb{C}_\alpha$, the non commutative, but associative algebra of generalized quaternions $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ and the non commutative, non associative algebra of generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$. Any finite dimensional associative algebra is isomorphic to a subalgebra of total matrix algebra, but the algebra of generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined vector-matrix repesentation for split octonions algebra in 1931. In the last section of the paper we construct the vector-matrix representation of generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$.

## 1. Bevezetés

Hamilton, W. R. (1805-1865) 1833-ban alkotta meg a klasszikus komplex számok struktúrájának rendezett valós számpárokon alapuló felépítését (HAMILTON, 1834), 1843-ban pedig felfedezte a valós kvaterniók 4-dimenziós nem kommutatív, de asszociatív algebráját (HAMILTON, 1844, 1847). Még ugyanezen évben Graves, J.T. (1806-1870) megalkotta a valós oktoniók 8-dimenziós nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját. Eredményeit azonban nem publikálta, csupán Hamiltonnal folytatott baráti levelezésében írta le. Cayley, A. (1821-1895) 1845-ben szintén eljutott az oktoniókhoz és publikálta is eredményeit, ezért hívják ma ezeket az objektumokat Cayley-féle számoknak (CAYLEY, 1889).

Dickson, L.E. (1874-1954) 1912-ben értelmezte az általánosított kvaternióalgebra fogalmát, 1919-ben pedig megalkotta a későbbiekben Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárásnak elnevezett módszert (DICKSON, 1912, 1919), amelyet tanítványa, Albert, A.A. (1915-1972) 1942-ben általánosított (ALBERT, 1942).

Zorn, M.A. (1906-1993) 1931-ben (ZORN, 1931,1933) megadta a split (hasított) oktoniók nem asszociatív algebrájának vektor-mátrix reprezentációját. Az eljárás némi módosítással alkalmazható a klasszikus oktoniók algebrájának reprezentálására is (EBBINGHAUS et al.,

1991). Dolgozatunk fő eredményeként megadjuk az általánosított oktoniók vektor-mátrix reprezentációját.

## 2. Általánosított komplex számok

Először összefoglaljuk azokat az általánosított komplex számokra vonatkozó legfontosabb fogalmakat és ismereteket, amelyek feltétlenül szükségesek a dolgozat további részeinek megértéséhez.

Legyen $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ a valós számok teste, 0 az összeadás, 1 a szorzás neutrális eleme, $\alpha \in \mathbb{R}$ pedig egy rögzített valós paraméter. Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ direktszorzatban műveleteket vezetünk be a következő módon: tetszőleges $r \in \mathbb{R}, (a_0, a_1), (b_0, b_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esetén

(1) skalárral való szorzás: $r \cdot (a_0, a_1) := (r \cdot a_0, r \cdot a_1)$,
(2) összeadás: $(a_0, a_1) + (b_0, b_1) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1)$,
(3) szorzás: $(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) := (a_0 \cdot b_0 - \alpha \cdot a_1 \cdot b_1, a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)$.

A (3) összefüggés a Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás. Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az (1) – (3) műveletekkel egy 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett. Itt $0_{\mathbb{C}} := (0,0)$ az összeadás, $1_{\mathbb{C}} := (1,0)$ a szorzás neutrális eleme. Ebben az algebrában, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az $1_{\mathbb{C}}$ és az $i := (0,1)$ elempár egy természetes bázist alkot.

Az $S := \{(a_0, 0): a_0 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ egy részalgebrát alkot az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ algebrában és az $f_{\mathbb{C}}: \mathbb{R} \to S, a_0 \mapsto (a_0, 0)$ egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, így pedig az $f_{\mathbb{C}}^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a_0 \mapsto (a_0, 0)$ egy beágyazási $\mathbb{R}$ algebra-monomorfizmus. A beágyazással nyert struktúrát az *általánosított komplex számok algebrájá*nak nevezzük és a $\mathbb{C}_\alpha$ szimbólummal jelöljük.

Az $\alpha = 1$ esetben a fenti konstrukcióval a klasszikus komplex számok $\mathbb{C}$ algebráját nyerjük. Az általánosított komplex számok algebrájáról további ismereteket találhatunk a szakirodalomban (KANTOR – SZOLODOVNYIKOV, 1985).

Az $i = (0,1) \in \mathbb{C}_\alpha$ elemre teljesül az $i^2 = -\alpha$ összefüggés és minden $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}_\alpha$ egyértelműen írható fel $a_0 + a_1 \cdot i$ alakban, amely előállítást az általánosított komplex szám *algebrai alak*jának nevezzük.

Az $1, i \in \mathbb{C}_\alpha$ elemek az *általánosított komplexegység*ek, amelyek szorzására érvényesek következő műveleti szabályok:

$$1 \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \qquad i^2 = -\alpha.$$

A $z = a_0 + a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ *konjugált*ján a $\bar{z} = a_0 - a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ elemet, *normá*ján az $N(z) := z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 \in \mathbb{R}$ számot értjük. Az $N: \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{R}$ egy nem-elfajuló multiplikatív kvadratikus alak, így $\mathbb{C}_\alpha$ egy kompozícióalgebra. A $z = a_0 + a_1 \cdot i$, $t = b_0 + b_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ elempár *skaláris szorzat*ának a $z \circ t = a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 \in \mathbb{R}$ számot nevezzük.

Az $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix}: a_0, a_1 \in \mathbb{R}\right\}$ alakú mátrixok egy 2-dimenziós részalgebrát alkotnak a másodrendű kvadratikus mátrixok $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában. A $g: \mathbb{C}_\alpha \to M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), a_0 + a_1 \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, így a $\mathbb{C}_\alpha$ algebra reprezentálható az $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebra $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ részalgebrájával.

Az általánosított komplex számok algebrájának részletes tárgyalása megtalálható (PÉNTEK, 2018) dolgozatában.

## 3. Általánosított kvaterniók

Ezután áttekintjük az általánosított kvaterniók struktúrájára vonatkozó legfontosabb ismereteket, ezeket felhasználjuk a dolgozatunk későbbi részeiben.

A $\mathbb{C}_\alpha$ algebrából kiindulva a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ direktszorzatban műveleteket értelmezünk a következő módon: tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $(z_0, z_1), (w_0, w_1) \in \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ esetén

(4) skalárral való szorzás: $r \cdot (z_0, z_1) := (r \cdot z_0, r \cdot z_1)$,
(5) összeadás: $(z_0, z_1) + (w_0, w_1) := (z_0 + w_0, z_1 + w_1)$,
(6) szorzás: $(z_0, z_1) \cdot (w_0, w_1) := (z_0 \cdot w_0 - \beta \cdot z_1 \cdot \overline{w_1}, z_0 \cdot w_1 + z_1 \cdot \overline{w_0})$,

ahol $\beta \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter. A (6) összefüggés a Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás.

A $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ halmaz a (4) – (6) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, de asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett, itt $0_{\mathbb{H}} := (0_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}})$ az összeadás, $1_{\mathbb{H}} := (1_{\mathbb{C}}, 0_{\mathbb{C}})$ a szorzás neutrális eleme. Ebben az algebrában, mint $\mathbb{R}$ feletti 4-dimenziós vektortérben az $1_{\mathbb{H}}, (i, 0_{\mathbb{C}}), j := (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}})$ és $(0_{\mathbb{C}}, i)$ elemnégyes egy természetes bázist alkot.

A $T := \{(z_0, 0_{\mathbb{C}}): z_0 \in \mathbb{C}_\alpha\} \subset \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ egy részalgebrát alkot a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ algebrában és az $f_{\mathbb{H}}: \mathbb{C}_\alpha \to T, z_0 \mapsto (z_0, 0_{\mathbb{C}})$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, így aztán az $f_{\mathbb{H}}^*: \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha. z_0 \mapsto (z_0, 0_{\mathbb{C}})$egy beágyazási $\mathbb{R}$ algebra-monomorfizmus. A beágyazással kapott struktúrát a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított kvaterniók algebrájá*nak nevezzük.

Az $\alpha = 1, \beta = 1$ speciális esetben a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók $\mathbb{H}$ algebráját nyerjük. Az általánosított kvaterniók részletes tárgyalását magyarul megtalálhatjuk (PÉNTEK, 2018) dolgozatában.

A $j = (0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}}) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemre teljesül $j^2 = -\beta$ és minden $(z_0, z_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elem egyértelműen írható fel $z_0 + z_1 \cdot j$ alakban, amely előállítást az általánosított kvaternió *komplex algebrai alak*jának nevezzük. Ha pedig $z_0 = a_0 + a_1 \cdot i, z_1 = a_2 + a_3 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ és $q = z_0 + z_1 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a $q$ kvaternió egyértelműen írható fel $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ alakban, ahol $k := i \cdot j$, ezen alakot az általánosított kvaternió *valós algebrai alak*jának hívjuk. Az $1, i, j, k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemek az *általánosított kvaternióegységek*, amelyek szorzására érvényesek a következő összefüggések:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k,$$
$$i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = \beta \cdot i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = \alpha \cdot j,$$
$$i^2 = -\alpha, \quad j^2 = -\beta, \quad k^2 = -\alpha \cdot \beta.$$

Ha $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor $\bar{q} := a_0 - a_1 \cdot i - a_2 \cdot j - a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ a $q$ elem *konjugált*ja, $N(q) := q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 + \beta \cdot a_2^2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3^2 \in \mathbb{R}$ pedig a $q$ *normá*ja. A $N: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}$ egy nem-elfajuló multiplikatív kvadratikus alak, ezért $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egy kompozícióalgebra. A $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k, q_1 = b_0 + b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elempár *skaláris szorzat*án a

$$q_0 \circ q_1 := a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük. A $\circ: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}$ skaláris szorzás egy szimmetrikus bilineáris leképezés. A $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternió *valós rész*én (skalár rész) az

(7) $$S(q) := a_0 \in \mathbb{R}$$

valós számot, *képzetes rész*én (vektor rész) a

(8) $$V(q) := U = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{R}^3$$

vektort értjük. Így minden $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egyértelműen írható fel $q = S(q) + V(q) = a_0 + U$ alakban, amelyet több szerző az általánosított kvaternió *Hamilton-féle alak*jának nevez. Ha a $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióra $S(q) = 0$ teljesül, akkor tiszta képzetes kvaternióról beszélünk, a továbbiakban ezek halmazát $Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ jelöli. Ha $U := a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$, $V := b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$, akkor ezen elemek szorzatára

$$U \cdot V = -(\alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3) + \tag{9}$$
$$+[(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k]$$

teljesül. Ez alapján e két tiszta képzetes kvaternió *skaláris szorzat*án a fenti értelmezéssel összhangban

$$U \circ V := \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R} \tag{10}$$

skalárt, *vektoriális szorzat*án pedig az

$$U \times V := (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + \tag{11}$$
$$+(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$$

vektort értjük. Ekkor a (9) – (11) alapján az

$$U \cdot V = -(U \circ V) + (U \times V) \tag{12}$$

összefüggés teljesül. Ennek kiterjesztéseként, ha $a_0 + U, b_0 + V \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor ezen általánosított kvaterniók szorzatára

$$(a_0 + U) \cdot (b_0 + V) = (a_0 \cdot b_0 - U \circ V) + (a_0 \cdot V + b_0 \cdot U + U \times V) \tag{13}$$

teljesül, ahol jobboldal első zárójele a szorzat valós, a második zárójel pedig szorzat képzetes része. Az $Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ halmazban a (10) skaláris szorzás egy szimmetrikus, a (11) vektoriális szorzás pedig egy antiszimmetrikus bilineáris leképezés. Az

$$M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}) := \left\{ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -\alpha a_1 & a_0 & -\alpha a_3 & a_2 \\ -\beta a_2 & \beta a_3 & a_0 & -a_1 \\ -\alpha\beta a_3 & -\beta a_2 & \alpha a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \tag{14}$$

alakú mátrixok egy 4-dimenziós részalgebrát alkotnak a negyedrendű kvadratikus mátrixok 16-dimenziós $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában. A

$$g^{\mathbb{H}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}), a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \mapsto \mathcal{A} \tag{15}$$

leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, ezért az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrája az $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebra $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ részalgebrájával reprezentálható.

Az általánosított kvaterniók algebrájáról további ismereteket találhatunk (PÉNTEK, 2018) dolgozatában.

## 4. Általánosított oktoniók

Ebben a fejezetben összefoglaljuk az általánosított oktoniókra vonatkozó legfontosabb ismereteket, ezzel készítjük elő a dolgozatunk fő részét képező reprezentációs tétel tárgyalását.

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrából kiindulva a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ direktszorzatban műveleteket értelmezünk a következő módon: tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $(p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén

(16) skalárral való szorzás: $r \cdot (p_0, p_1) := (r \cdot p_0, r \cdot p_1)$,

(17) összeadás: $(p_0, p_1) + (q_0, q_1) := (p_0 + q_0, p_1 + q_1)$,

(18) szorzás: $(p_0, p_1) \cdot (q_0, q_1) := (p_0 \cdot q_0 - \gamma\overline{q_1} \cdot p_1, p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0)$,

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter. A (18) összefüggés a Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás.

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ halmaz a (16) – (18) műveletekkel egy 8-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett, ahol $0_{\mathbb{O}} := (0_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$ az összeadás, $1_{\mathbb{O}} := (1_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$ a szorzás neutrális eleme. Ebben az algebrában, mint 8-dimenziós vektortérben az $1_{\mathbb{O}}, (i, 0_{\mathbb{H}}), (j, 0_{\mathbb{H}}), (k, 0_{\mathbb{H}}), E := (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}), (0_{\mathbb{H}}, i), (0_{\mathbb{H}}, j), (0_{\mathbb{H}}, k)$ elemrendszer egy természetes bázist alkot. Megjegyezzük, hogy ez a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebra egy alternáló algebra, mivel a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebra szorzási művelete asszociatív (CURTIS, 1990)

Az $U := \{(q_0, 0_{\mathbb{H}}) : q_0 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egy részalgebrát alkot a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrában, és az $f_{\mathbb{O}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to U, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, az $f_{\mathbb{O}}^* : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$ ezért egy beágyazási $\mathbb{R}$ algebra-monomorfizmus. A beágyazással nyert struktúrát az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított oktoniók algebrájá*nak nevezzük.

Az $\alpha = 1, \beta = 1$ *és* $\gamma = 1$ speciális esetben a klasszikus Cayley-Graves-féle oktoniók $\mathbb{O}$ algebráját nyerjük. Az általánosított oktoniók algebráját magyarul tárgyalja (PÉNTEK, 2020) dolgozatában.

Az $E = (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elemre teljesül $E^2 = -\gamma$ és minden $(q_0, q_1) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ egyértelműen írható fel $q_0 + q_1 \cdot E$ alakban. Mivel pedig a $q_0, q_1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egyértelműen írható fel az előző fejezetben látottak szerint $q_0 = a_0 + U$, illetve $q_1 = b_0 + V$ $\left(a_0, b_0 \in \mathbb{R}, U, V \in Im\left(\mathbb{H}_{\alpha\beta}\right)\right)$ alakban, így minden általánosított oktonió is egyértelműen állítható elő

(19) $$o = q_0 + q_1 \cdot E = (a_0 + U) + (b_0 + V) \cdot E$$

formában.

Az általánosított oktoniók kvaternióalgebrai alakjával történő számolás szabályai a következők: legyen $r \in \mathbb{R}$, $p_0 + p_1 \cdot E, q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(20) skalárral való szorzás: $r \cdot (p_0 + p_1 \cdot E) = (r \cdot p_0) + (r \cdot p_1) \cdot E$,

(21) összeadás: $(p_0 + p_1 \cdot E) + (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) \cdot E$,

(22) szorzás$(p_0 + p_1 \cdot E) \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 \cdot q_0 - \gamma\overline{q_1} \cdot p_1) + (p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0) \cdot E$,

teljes összhangban a (16) – (18) összefüggésekkel.

Ha $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k, q_1 = a_4 + a_5 \cdot i + a_6 \cdot j + a_7 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a $q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ oktonió egyértelműen írható fel

(23) $$a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k + a_4 \cdot E + a_5 \cdot (i \cdot E) + a_6 \cdot (j \cdot E) + a_7 \cdot (k \cdot E)$$

alakban.

Bevezetve az $e_0 := 1, e_1 := i, e_2 := j, e_3 := k, e_4 := E, e_5 := i \cdot E, e_6 := j \cdot E, e_7 := k \cdot E$ jelöléseket a fentiek szerint a tetszőleges $o = q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ oktonió egyértelműen állítható elő az

(24) $$o = \sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l$$

alakban, amelyet az általánosított oktonió *valós algebrai alak*jának nevezzük. Az előállításban szereplő $\{e_l\}_{l=0}^{7}$ elemeket pedig *általánosított oktonióegységek*nek hívjuk, amelyek Cayley-féle szorzótáblája (PÉNTEK, 2020) dolgozata szerint az I. Táblázatban található.

Vegyük észre, hogy e műveleti táblázat belső részének bal felső $2 \times 2$-es mezője a $\mathbb{C}_\alpha$, bal felső $4 \times 4$-es mezője pedig a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúra egységeinek szorzótáblája.

Az általánosított oktoniók valós algebrai alakjával a következő módon számolhatunk: ha $r \in \mathbb{R}$, és $o_1 = \sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l$ , $o_2 = \sum_{m=0}^{7} b_m \cdot e_m \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(25) skalárral való szorzás: $r \cdot (\sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l) = \sum_{l=0}^{7} (r \cdot a_l) \cdot e_l$,

(26) összeadás: $\sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l + \sum_{l=0}^{7} b_l \cdot e_l = \sum_{l=0}^{7} (a_l + b_l) \cdot e_l$,

(27) szorzás: $(\sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l) \cdot (\sum_{m=0}^{7} b_m \cdot e_m) = \sum_{l,m=0}^{7} (a_l \cdot b_m) \cdot (e_l \cdot e_m)$.

Az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrájának részletes tárgyalása megtalálható (PÉNTEK, 2020) dolgozatában.

Ha $o = \sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ , akkor $\bar{o} := a_0 \cdot e_0 - \sum_{l=1}^{7} a_l \cdot e_l \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elemet az $o$ általánosított oktonió *konjugáltjá*nak, az $N(o) := o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 + \beta \cdot a_2^2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3^2 + \gamma \cdot a_4^2 + \alpha \cdot \gamma \cdot a_5^2 + \beta \cdot \gamma \cdot a_6^2 + \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot a_7^2 \in \mathbb{R}$ valós számot az $o$ általánosított oktonió *normá*jának nevezzük. Ez az $N: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathbb{R}$ egy nem-elfajuló multiplikatív kvadratikus alak, így az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra egy kompozícióalgebra.

## 5. Az általánosított oktoniók reprezentációja vektor-mátrixokkal

Először a $\gamma \in \mathbb{R}$ paraméter felhasználásával konstruáljuk meg a 2. fejezetben látott módon az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\gamma$ algebráját. Ezután az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterek segítségével építsük fel a 3. fejezetben bemutatott módon az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebráját.

A $\mathbb{C}_\gamma^3 := \{(w_1, w_2, w_3): w_l \in \mathbb{C}_\gamma (l = 1,2,3)\}$ halmazban értelmezzünk egy $t \in \mathbb{C}_\gamma$ elemmel, mint skalárral való szorzást:

(28) $$t \cdot (w_1, w_2, w_3) := (t \cdot w_1, t \cdot w_2, t \cdot w_3),$$

továbbá egy összeadást is a

(29) $$(w_1, w_2, w_3) + (z_1, z_2, z_3) := (w_1 + z_1, w_2 + z_2, w_3 + z_3)$$

összefüggéssel. A $\mathbb{C}_\gamma$ egy 2-dimenziós, a $\mathbb{C}_\gamma^3$ egy 6-dimenziós vektortér az $\mathbb{R}$ test felett. A $\gamma = 1$ esetén $\mathbb{C}_\gamma$ egy test, minden más esetben egy kommutatív, neutrális elemes gyűrű, a $\mathbb{C}_\gamma^3$ pedig egy baloldali modulus a $\mathbb{C}_\gamma$ gyűrű felett.

A (28) és (29) definíciókból következik, hogy ha $V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor

(30) $$i \cdot V = i \cdot (v_1, v_2, v_3) = (i \cdot v_1, i \cdot v_2, i \cdot v_3) \in \mathbb{C}_\gamma^3,$$

és ennek felhasználásával, ha $U = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor minden $W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}_\gamma^3$ elem előállítható

(31) $$W = U + i \cdot V$$

alakban. A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrára támaszkodva bevezethetünk a $\mathbb{C}_\gamma^3$ struktúrában egy skaláris szorzást: ha $W = (w_1, w_2, w_3), Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}_\gamma^3$ , akkor legyen

(32) $$W \circ Z := \alpha \cdot w_1 \cdot z_1 + \beta \cdot w_2 \cdot z_2 + \alpha \cdot \beta \cdot w_3 \cdot z_3 \in \mathbb{C}_\gamma,$$

értelmezhetünk továbbá egy vektoriális szorzást is a

(33) $$W \times Z := [\beta \cdot (w_2 \cdot z_3 - w_3 \cdot z_2), \alpha \cdot (w_3 \cdot z_1 - w_1 \cdot z_3), w_1 \cdot z_2 - w_2 \cdot z_1]$$

összefüggéssel.

A $\circ\colon \mathbb{C}_\gamma^3 \times \mathbb{C}_\gamma^3 \to \mathbb{C}_\gamma$ skaláris szorzás egy szimmetrikus, a $\times\colon \mathbb{C}_\gamma^3 \times \mathbb{C}_\gamma^3 \to \mathbb{C}_\gamma^3$ vektoriális szorzás pedig egy antiszimmetrikus bilineáris leképezés a $\mathbb{C}_\gamma^3$ struktúrában.

**1. Lemma.** A $\mathbb{C}_\gamma^3$ struktúra $\circ$ és $\times$ műveletei az $Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ megfelelő $\circ$ és $\times$ műveleteinek természetes kiterjesztései.

**2. Lemma.** Ha $a + i \cdot b \in \mathbb{C}_\gamma$, $U, V, U', V' \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ és így $U + i \cdot V, U' + i \cdot V' \in \mathbb{C}_\gamma^3$, ekkor érvényesek következő azonosságok:

(a) $(a + i \cdot b) \cdot (U + i \cdot V) = (a \cdot U - \gamma \cdot b \cdot V) + i \cdot (a \cdot V + b \cdot U)$,
(b) $(U + i \cdot V) \circ (U' + i \cdot V') = [U \circ U' - \gamma \cdot (V \circ V')] + i \cdot [U \circ V' + V \circ U']$
(c) $(U + i \cdot V) \times (U' + i \cdot V') = [U \times U' - \gamma \cdot (V \times V')] + i \cdot [U \times V' + V \times U']$.

Tekintsük ezután a

(34) $$H(\mathbb{C}_\gamma) := \left\{A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \colon A_{11}, A_{22} \in \mathbb{C}_\gamma, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{C}_\gamma^3\right\}$$

alakú hipermátrixok halmazát és értelmezzünk e halmazban műveleteket a következő módon:

(35) skalárral való szorzás: ha $r \in \mathbb{R}, A \in H(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor

$$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix} \in H(\mathbb{C}_\gamma),$$

(36) összeadás: ha $A, B \in H(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} \in H(\mathbb{C}_\gamma),$$

(37) szorzás: ha $A, B \in H(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor

$$A * B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} - A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix} \in H(\mathbb{C}_\gamma).$$

Legyen most

(38) $$o = (a + U) + (b + V) \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \quad \left(a, b \in \mathbb{R}, U, V \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})\right)$$

egy tetszőleges általánosított oktonió és rendeljük hozzá azt az $A \in H(\mathbb{C}_\gamma)$ hipermátrixot, amelyre

(39) $$A_{11} := a + i \cdot b, A_{22} := a - i \cdot b \in \mathbb{C}_\gamma, A_{12} := -U + i \cdot V, A_{21} = U + i \cdot V \in \mathbb{C}_\gamma^3$$

teljesül. Az ilyen speciális alakú hipermátrixok halmazát *általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok* halmazának nevezzük és $Zorn(\mathbb{C}_\gamma)$ szimbólummal jelöljük. Egyszerűen beláthatjuk, hogy ha $r \in \mathbb{R}$ és $A, B \in Zorn(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor $r \cdot A, A + B$ és $A * B \in Zorn(\mathbb{C}_\gamma)$, vagyis az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmaza zárt ezen műveletekre nézve.

Ezután már bizonyíthatjuk dolgozatunk fő eredményét, az általánosított oktoniók reprezentációs tételét.

**Tétel.** Az $F\colon \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to Zorn(\mathbb{C}_\gamma), (a + U) + (b + V) \cdot E \mapsto \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.

Bizonyítás. Az $F$ hozzárendelés egy bijektív leképezés, mivel az $F^{-1}: Zorn(\mathbb{C}_\gamma) \to \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ inverz hozzárendelés is leképezés.

Ha $r \in \mathbb{R}$ és $o = (a+U)+(b+V)\cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor a (19), (20) és (35) alapján

$$(40)\quad F(r\cdot o) = F(r\cdot[(a+U)+(b+V)\cdot E]) = F(r\cdot(a+U)+r\cdot(b+V)\cdot E) =$$

$$F\big((r\cdot a+r\cdot U)+(r\cdot b+r\cdot V)\cdot E\big) = \begin{pmatrix} r\cdot a+i\cdot(r\cdot b) & -r\cdot U+i\cdot(r\cdot V) \\ r\cdot U+i\cdot(r\cdot V) & r\cdot a-i\cdot(r\cdot b)\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r\cdot(a+i\cdot b) & r\cdot(-U+i\cdot V) \\ r\cdot(U+i\cdot V) & r\cdot(a-i\cdot b)\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} a+i\cdot b & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & a-i\cdot b\end{pmatrix} = r\cdot F(o)$$

teljesül, így az $F$ egy homogén leképezés.

Ha $o = (a+U)+(b+V)\cdot E, o' = (a'+U')+(b'+V')\cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor a (19), (21) és (36) felhasználásával

$$(41)\quad F(o+o') = F([(a+U)+(b+V)\cdot E]+[(a'+U')+(b'+V')\cdot E]) =$$

$$F([(a+a')+(U+U')]+[(b+b')+(V+V')]\cdot E) =$$

$$\begin{pmatrix} (a+a')+i\cdot(b+b') & -(U+U')+i\cdot(V+V') \\ (U+U')+i\cdot(V+V') & (a+a')-i\cdot(b+b')\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a+i\cdot b & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & a-i\cdot b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+i\cdot b' & -U'+i\cdot V' \\ U'+i\cdot V' & a'-i\cdot b'\end{pmatrix} = F(o)+F(o'),$$

ezért az $F$ egy additív leképezés. Eddig beláttuk, hogy $F$ egy $\mathbb{R}$ vektortér-izomorfizmus.

Legyenek ezután $o = (a+U)+(b+V)\cdot E, o' = (a'+U')+(b'+V')\cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek. A (13) és (22) összefüggések felhasználásával

$$(42)\quad o\cdot o' = [(a+U)+(b+V)\cdot E]\cdot[(a'+U')+(b'+V')\cdot E] =$$

$$\big[(a+U)\cdot(a'+U')-\gamma\cdot\overline{(b'+V')}\cdot(b+V)\big]+\big[(b+V)\cdot\overline{(a'+U')}+(b'+V')\cdot(a+U)\big]\cdot E =$$

$$[(a+U)\cdot(a'+U')-\gamma\cdot(b'-V')\cdot(b+V)]+[(b+V)\cdot(a'-U')+(b'+V')\cdot(a+U)]\cdot E =$$

$$\{[(aa'-U\circ U')+(aU'+a'U+U\times U')]-\gamma[(bb'+V\circ V')+(b'V-bV'-V'\times V)]\}+$$

$$\{[(ba'+U'\circ V)+(-bU'+a'V-V\times U')]+[(b'a-U\circ V')+(b'U+aV'+V'\times U)]\}\cdot E$$

adódik. A (42) összefüggés rendezése után nyerjük az

$$\big[\big(aa'-\gamma bb'-U\circ U'-\gamma(V\circ V')\big)+\big(aU'+a'U+\gamma bV'-\gamma b'V+U\times U'-\gamma(V\times V')\big)\big]+$$

$$[(ab'+a'b-U\circ V'+U'\circ V)+(aV'+a'V-bU'+b'U-U\times V'+U'\times V)]\cdot E$$

előállítást. Vezessük be a szögletes zárójelekben szereplő kifejezésekre rendre a következő jelöléseket:

Legyen

$$(43)\quad \begin{aligned} a^* &:= aa'-\gamma bb'-U\circ U'-\gamma(V\circ V')\in\mathbb{R},\\ b^* &:= ab'+a'b-U\circ V'+U'\circ V\in\mathbb{R},\\ U^* &:= aU'+a'U+\gamma bV'-\gamma b'V+U\times U'-\gamma(V\times V')\in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta}),\\ V^* &:= aV'+a'V-bU'+b'U-U\times V'+U'\times V\in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta}),\end{aligned}$$

amelyek felhasználásával (42) szerint

$$(44)\quad o\cdot o' = (a^*+U^*)+(b^*+V^*)\cdot E$$

adódik. Ekkor pedig

$$(45)\quad F(o\cdot o') = \begin{pmatrix} a^*+i\cdot b^* & -U^*+i\cdot V^* \\ U^*+i\cdot V^* & a^*-i\cdot b^*\end{pmatrix}$$

teljesül.

A (37) összefüggés felhasználásával

$$(46)\qquad F(o)*F(o')=F\big((a+U)+(b+V)\cdot E\big)*F\big((a'+U')+(b'+V')\cdot E\big)=$$

$$\begin{pmatrix} a+i\cdot b & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & a-i\cdot b \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} a'+i\cdot b' & -U'+i\cdot V' \\ U'+i\cdot V' & a'-i\cdot b' \end{pmatrix}.$$

E két vektor-mátrix szorzatának bal felső komponense az 1. lemma, a 2. lemma (b) része és a (43) szerint

$$(47)\qquad (a+i\cdot b)\cdot(a'+i\cdot b')+(-U+i\cdot V)\circ(U'+i\cdot V')=$$

$$aa'+i\cdot ab'+i\cdot a'b-\gamma\cdot bb'-U\circ U'-i\cdot(U\circ V')+i\cdot(U'\circ V)-\gamma\cdot(V\circ V')=$$

$$\big(aa'-\gamma\cdot bb'-U\circ U'-\gamma\cdot(V\circ V')\big)+i\cdot(ab'+a'b-U\circ V'+U'\circ V)=a^*+i\cdot b^*.$$

Teljesen hasonlóan e két vektor-mátrix szorzatának jobb alsó komponense

$$(48)\qquad (a-i\cdot b)\cdot(a'-i\cdot b')+(U+i\cdot V)\circ(-U'+i\cdot V')=$$

$$aa'-i\cdot ab'-i\cdot a'b-\gamma\cdot bb'-U\circ U'+i\cdot(U\circ V')-i\cdot(U'\circ V)-\gamma\cdot(V\circ V')=$$

$$\big(aa'-\gamma\cdot bb'-U\circ U'-\gamma\cdot(V\circ V')\big)-i\cdot(ab'+a'b-U\circ V'+U'\circ V)=a^*-i\cdot b^*.$$

A szorzat vektor-mátrix jobb felső komponense az 1. lemma, a 2. lemma (a),(c) része és a (43) felhasználásával

$$(49)\quad (a+i\cdot b)(-U'+i\cdot V')+(a'-i\cdot b')(-U+i\cdot V)-(U+i\cdot V)\times(U'+i\cdot V')=$$

$$-aU'+i\cdot aV'-i\cdot bU'-\gamma\cdot bV'-a'U+i\cdot a'V+i\cdot b'U+\gamma\cdot b'V-U\times U'-i\cdot(U\times V')+$$

$$+i\cdot(U'\times V)+\gamma\cdot(V\times V')=-\big(aU'+a'U+\gamma\cdot bV'-\gamma\cdot b'V+U\times U'-\gamma\cdot(V\times V')\big)+$$

$$+i\cdot(aV'+a'V-bU'+b'U-U\times V'+U'\times V)=-U^*+i\cdot V^*$$

adódik. Végül a szorzat vektor-mátrix bal alsó komponense az előzővel analóg okoskodással

$$(50)\quad (a'+i\cdot b')(U+i\cdot V)+(a-i\cdot b)(U'+i\cdot V')+(-U+i\cdot V)\times(-U'+i\cdot V')=$$

$$a'U+i\cdot a'V+i\cdot b'U-\gamma\cdot b'V+aU'+i\cdot aV'-i\cdot bU'+\gamma\cdot bV'+U\times U'-i\cdot(U\times V')+$$

$$+i\cdot(U'\times V)-\gamma\cdot(V\times V')=\big(aU'+a'U+\gamma\cdot bV'-\gamma\cdot b'V+U\times U'-\gamma\cdot(V\times V')\big)+$$

$$+i\cdot(aV'+a'V-bU'+b'U-U\times V'+U'\times V)=U^*+i\cdot V^*$$

következik. Így (46) – (50) felhasználásával

$$(51)\qquad F(o)*F(o')=\begin{pmatrix} a^*+i\cdot b^* & -U^*+i\cdot V^* \\ U^*+i\cdot V^* & a^*-i\cdot b^* \end{pmatrix}$$

következik, amit a (45) összefüggéssel összevetve

$$(52)\qquad F(o\cdot o')=F(o)*F(o')$$

adódik, vagyis az $F$ egy multiplikatív leképezés. Ez a fentiekkel együtt pontosan azt bizonyítja, hogy az $F$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.□

## Összefoglalás

Dolgozatunkban a valós számok $\mathbb{R}$ testéből kiindulva az általánosított Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás alkalmazásával több, egymásra épülő kompozícióalgebrát konstruáltunk. Az $\mathbb{R}$ algebrából első lépésként adódó általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ kompozícióalgebrája

pontosan azért kommutatív, mivel a konstrukció kiinduló algebrája maga $\mathbb{R}$. A második lépésben a $\mathbb{C}_\alpha$ algebrából nyertük az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ kompozícióalgebráját, ami éppen azért lesz asszociatív, mivel a kiinduló $\mathbb{C}_\alpha$ kompozícióalgebra kommutatív és asszociatív. Végül a harmadik lépésben a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrából kiindulva kaphattuk meg az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ kompozícióalgebráját, ami pedig pontosan azért alternáló algebra, mivel a kiinduló $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ kompozícióalgebra asszociatív (CURTIS, 1990).

A $\mathbb{C}_\alpha$ és a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrák véges dimenziós asszociatív algebrák, így eredményesen reprezentálhatók mátrixokkal, az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra viszont nem asszociatív. E struktúra reprezentálására sikeresen alkalmazhatók a vektor-mátrixok, amelyeket Zorn, M.A. vezetett be az 1930-as években a split oktoniók alternatív algebrájának leírására. Módszerét általánosítva adunk rövid bizonyítást az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra vektor-mátrixokkal történő reprezentációjának tételére.

| $\cdot$ | $\boldsymbol{e_0}$ | $\boldsymbol{e_1}$ | $\boldsymbol{e_2}$ | $\boldsymbol{e_3}$ | $\boldsymbol{e_4}$ | $\boldsymbol{e_5}$ | $\boldsymbol{e_6}$ | $\boldsymbol{e_7}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{e_0}$ | $e_0$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
| $\boldsymbol{e_1}$ | $e_1$ | $-\alpha e_0$ | $e_3$ | $-\alpha e_2$ | $e_5$ | $-\alpha e_4$ | $-e_7$ | $\alpha e_6$ |
| $\boldsymbol{e_2}$ | $e_2$ | $-e_3$ | $-\beta e_0$ | $\beta e_1$ | $e_6$ | $e_7$ | $-\beta e_4$ | $-\beta e_5$ |
| $\boldsymbol{e_3}$ | $e_3$ | $\alpha e_2$ | $-\beta e_1$ | $-\alpha\beta e_0$ | $e_7$ | $-\alpha e_6$ | $\beta e_5$ | $-\alpha\beta e_4$ |
| $\boldsymbol{e_4}$ | $e_4$ | $-e_5$ | $-e_6$ | $-e_7$ | $-\gamma e_0$ | $\gamma e_1$ | $\gamma e_2$ | $\gamma e_3$ |
| $\boldsymbol{e_5}$ | $e_5$ | $\alpha e_4$ | $-e_7$ | $\alpha e_6$ | $-\gamma e_1$ | $-\alpha\gamma e_0$ | $-\gamma e_3$ | $\alpha\gamma e_2$ |
| $\boldsymbol{e_6}$ | $e_6$ | $e_7$ | $\beta e_4$ | $-\beta e_5$ | $-\gamma e_2$ | $\gamma e_3$ | $-\beta\gamma e_0$ | $-\beta\gamma e_1$ |
| $\boldsymbol{e_7}$ | $e_7$ | $-\alpha e_6$ | $\beta e_5$ | $\alpha\beta e_4$ | $-\gamma e_3$ | $-\alpha\gamma e_2$ | $\beta\gamma e_1$ | $-\alpha\beta\gamma e_0$ |

**Táblázat: Az általánosított oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblája**

## Irodalomjegyzék


[1] **Albert, A. A**., Quadratic forms permitting composition. Annals of Mathematics, vol. 43, (1942) 161-177.
[2] **Cayley, A**. (1889): On Jacobi's elliptic function, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions. The collected Mathematical Papers of Arthur Cayley 1: 127.
[3] **Curtis, M. L**. (1990): Abstract Linear Algebra. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg.
[4] **Dickson, L. E**. (1912): Linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 13(1) 59-73.
[5] **Dickson, L. E**. (1919): On Quaternions and Their Generalization and the History of Eight Square Theorem. Annals of Mathematics, 2nd. 20(3) 155-171.
[6] **Ebbinghaus, H.D. Hermes, H. Hirzebruch, F. Koecher, M. Mainzer, M. Mainzer, K. Neukirch, J. Prestel, A. Remmert, R.** (1991): Numbers. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg.
[7] **Hamilton, W. R.,** On Conjugate functions, or algebraic Couples. British Association Report, Edinburg, (1834) 519-523.
[8] **Hamilton, W. R.,** On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 2, (1944) 424-434.
[9] **Hamilton, W. R.** (1847): On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 3, 1-16.
[10] **Kentor, I. L., Szolodovnyikov, A. Sz.** (1985): Hiperkomplex számok. Gondolat, Budapest, 1985.
[11] **Péntek, K.,** (2018): Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók. Matematikai Közlemények. VI. 25-30. doi:10.20312/dim.2018.03
[12] **Péntek, K.,**. (2020): Az általánosított oktonióalgebrákról. Savaria Természettudományi és Sporttudományi Közlemények 18. Szombathely, 7-20.
[13] **Zorn, M. A.,** (1931): Theorie der alternativen Ringe. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer, Berlin/Heidelberg. 123-147.
[14] **Zorn, M. A.,** (1933): Alternativkörper und quadratische systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg. 395-402.

doi:10.20312/dim.2023.03

# Speciális meteorológiai adathalmaz statisztikai vizsgálata

**Csanády Viktória**
Soproni Egyetem
Informatikai és Matematikai Intézet
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A különböző meteorológiai adatok - így az ég-föld közötti villámok - időbeli és területi változása, adott területen a változás tendenciája különböző statisztikai módszerek alkalmazásával jellemezhető. Az alábbiakban 9 terület kerül összehasonlításra, valamint ezek közül egy terület 32 évi adatsorának modellezése kerül bemutatásra, Gauss függvények alkalmazásával.

ABSTRACT. The temporal and spatial changes of different meteorological data – such as lightning between the sky and the ground – and the tendency of the change in a given area can be characterized by using different statistical methods. In the following, 9 areas are compared, of which the modeling the 32-year data series of one area is presented using Gaussian functions.

## 1. Bevezetés

A különböző meteorológiai adatok, leggyakrabban hőmérséklet, csapadékmennyiség már számtalan esetben kerültek bele különböző biológiai vizsgálatokba, mint a vizsgálat tárgyának befolyásoló tényezői, vagy mint az alkalmazott modell független változója vagy változói. A klímaváltozás óta azonban, ma már nagy jelentőséggel bíró tényezők mellett számtalan más egyéb meteorológiai paraméter kutatása is elkerülhetetlen. A szélsőséges időjárási történések indokolják ezeket a kutatásokat, és felvetik annak a kérdését, miként lehet statisztikailag jellemezni ezeket a speciális adathalmazokat. Legtöbb jellemző esetén nem megismételhető mérési adatról van szó, hanem egyetlen adatról, ami lehet természetesen idő- vagy helyfüggő, akár mindkettő. Emiatt a legáltalánosabb közismert statisztikai jellemzők és vizsgálatok nem alkalmazhatók, illetve nem adnak számunkra érdemleges sokszor értelmes információt. Az alábbiakban egy a már említett tulajdonságú meteorológiai adathalmaz kerül terítékre, melynek vizsgálata különböző megközelítésből történik.

A vizsgálat tárgyát az ég-föld közti villámok száma képezi, Ausztria szövetségi tartományaiban 1992-től 2023-ig, az idősoros vizsgálat egy kiemelt szövetségi tartomány adatsorát érinti. Az adatsorok a https://www.aldis.at internetes oldal szabadon hozzáférhető adatbankjából származnak, ahonnét ingyenesen letölthetők.

Az alábbiakban először villámsűrűségi értékek kerülnek elemzésre szövetségi tartomány összehasonlításban, klaszteranalízissel. A villámsűrűség a villámcsapások átlagos száma $km^2$-ként évente. Ezt követi, Stájerország, mint kiválasztott szövetségi tartomány időfüggő vizsgálata, a már említett időintervallumban, melynek során az évenként, havonta észlelt ég-föld villámok előfordulási gyakoriságai kerülnek elemzésre. A vizsgált 32 év, évenkénti adatsorának tendenciája haranggörbével jellemezhető, így alkalmasnak bizonyult a

transzformált Gauss görbe illesztése. A kapott eredményekből, az évenként illesztett modellek eltolási paraméterei ezek után összevethetők. Az illesztések pontosságának ellenőrzését a mindenkori korrelációs együttható, (nem lineáris korrelációs együttható) értéke szolgálja, figyelembe véve, hogy a vizsgált meteorológiai adatsor esetén a vizsgált érték alacsonyabb lehet, nem várható el olyan magas korreláció, mint pontosan mérhető fizikai jellemzőknél.
A vizsgálat célja a szövetségi tartományok esetében, hogy a villámsűrűségi adatok alapján csoportosítsa azokat, igazolt statisztikai módszerrel. A 32 év esetében a cél pedig az, hogy kimutassa, hogy a villámgyakoriságok éves tendenciája megfelel a feltételezett tendenciának, illetve a modellek paramétereinek elemzésével a szélsőséges évek statisztikailag kimutathatók legyenek.
Az adathalmaz vizsgálata során alkalmazott software a STATISTICA, a modellek illesztésénél a szükséges kezdőértékek az adatsorból jól becsülhetők.

A vizsgálat tárgya:

- az ausztriai szövetségi tartományok átlagos villámsűrűsége (2012-2021 évek átlaga) (www.aldis.at)
- ausztriai ég-föld villámlási adatok szövetségi tartományonként, 1992. január – 2023. július, havonkénti összesített esetszám. (www.aldis.at)

A vizsgált adathalmazok és az alkalmazott modellek:

| **Szövetségi tartomány** | **Villámsűrűség** |
|---|---|
| Burgenland | 1,27 |
| Kärnten/Karintia | 1,7 |
| Niederösterreich/Alsó-Ausztria | 1,05 |
| Oberösterreich/Felső-Ausztria | 1,2 |
| Salzburg | 1,28 |
| Steiermark/Stájerország | 1,82 |
| Tirol | 1,21 |
| Vorarlberg | 1,04 |
| Wien/Bécs | 0,97 |

**1. táblázat. Villámsűrűség szövetségi tartományonként**

Az alábbi adathalmaz esetében eltekintünk a teljes részletességtől az adatok megtekinthetők a fentiekben megadott internetcím alatt.

| Év | Jan. | Febr. | Marc. | Ápr. | Máj. | Jún. | Júl. | Aug. | Szept. | Okt. | Nov. | Dec. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1992 | 0 | 0 | 0 | 560 | 1037 | 6584 | 7757 | 8828 | 3635 | 592 | 13 | 1 |
| 1993 | 0 | 0 | 8 | 518 | 5329 | 15648 | 21283 | 15363 | 1166 | 281 | 9 | 38 |
| 1994 | 19 | 5 | 10 | 494 | 3233 | 3365 | 13897 | 19855 | 930 | 64 | 2 | 0 |
| 1995 | 14 | 3 | 15 | 1460 | 3121 | 5594 | 15696 | 7207 | 1172 | 0 | 114 | 20 |
| . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . | . . |
| 2020 | 27 | 11 | 5 | 115 | 428 | 1890 | 6649 | 7423 | 895 | 190 | 0 | 0 |
| 2021 | 0 | 0 | 2 | 31 | 294 | 3021 | 6404 | 4667 | 297 | 3 | 1 | 0 |
| 2022 | 0 | 0 | 0 | 47 | 3626 | 10658 | 4128 | 2567 | 725 | 3 | 2 | 0 |
| 2023 | 1 | 1 | 59 | 230 | 964 | 6438 | 5490 | | | | | |

**2. táblázat. Regisztrált ég-föld villámok száma Stájerországban**

*Az alkalmazott regressziós modell:*

- Transzformált Gauss függvény

- matematikai alakja:

$$y = \frac{b_3}{e^{(b_2(x-b_1))^2}} + b_0$$

- számítógépes alak:

$$Var\ n = b3/\exp(b2 * (NewVar - 1 * b1))\text{^}2) + b0.$$

A modell rövid jellemzése:

Az alkalmazott Gauss függvény négy paraméteres általános modell, ami rendelkezik a szükséges eltolási és nyújtási paraméterekkel. A paraméterek értékeiből pontosan megadhatók a modell fő matematikai jellemzői, így a lokális szélsőérték helye és értéke. A négy paraméter kezdőértékének megadása az adathalmazból becsülhető szükség esetén. A változók jelentése az illesztések során:

- NewVar = Naptári hónapok sorszáma
- Var n = 1, 2,….32 Az évek 1992-től 2023-ig (1992 esetén n=1).

## 2. Számított eredmények, kiértékelés

### 2.1. Villámsűrűségi átlagértékek klaszter eredményei

Az alábbi két táblázatban a klaszteranalízis eredményei olvashatók 3 klaszter esetén, elsőként a weboldal által megadott villámsűrűségi értékekre, ami tíz év (2012-2021) átlaga, majd pedig 32 év átlagai (szerző által számított) esetén az egyes szövetségi tartományokra nézve.

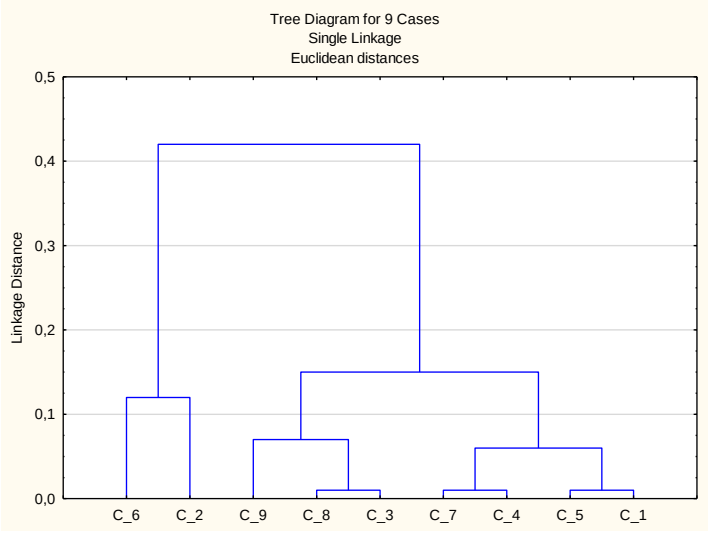
| | Villámsűrűségi átlagok 10 év esetén | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Átlag | Sorszám | Klaszter | Távolság |
| Burgenland | 1,27 | 1 | 2 | 0,03 |
| Kärnten/Karintia | 1,7 | 2 | 3 | 0,06 |
| Niederösterreich/Alsó-A. | 1,05 | 3 | 1 | 0,03 |
| Oberösterreich/Felső-A. | 1,2 | 4 | 2 | 0,04 |
| Salzburg | 1,28 | 5 | 2 | 0,04 |
| Steiermark/Stájerország | 1,82 | 6 | 3 | 0,06 |
| Tirol | 1,21 | 7 | 2 | 0,03 |
| Voralberg | 1,04 | 8 | 1 | 0,02 |
| Wien/Bécs | 0,97 | 9 | 1 | 0,05 |

**3. táblázat. Villámsűrűségi átlagok klasztere 10 év esetén**

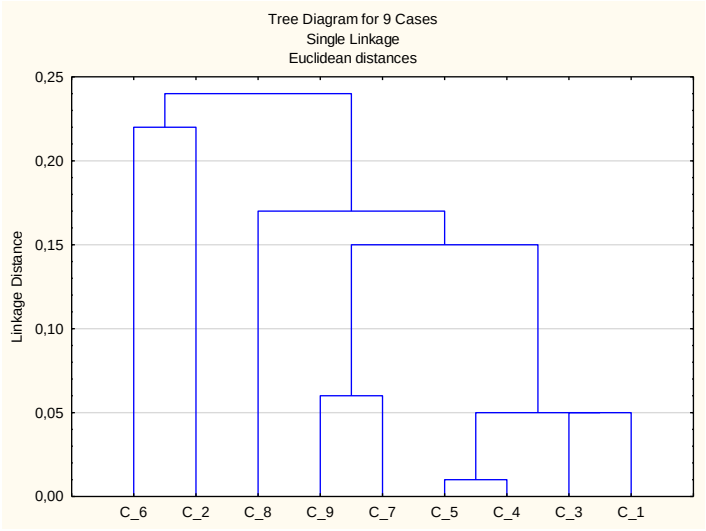
| | Villámsűrűségi átlagok 32 év esetén | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Átlag | Sorszám | Klaszter | Távolság |
| Burgenland | 1,06 | 1 | 2 | 0,03 |
| Kärnten/Karintia | 1,36 | 2 | 3 | 0,06 |
| Niederösterreich/Alsó-A. | 1,01 | 3 | 2 | 0,03 |
| Oberösterreich/Felső-A. | 1,12 | 4 | 2 | 0,04 |
| Salzburg | 1,11 | 5 | 2 | 0,04 |
| Steiermark/Stájerország | 1,58 | 6 | 3 | 0,06 |
| Tirol | 0,86 | 7 | 1 | 0,03 |
| Voralberg | 0,63 | 8 | 1 | 0,02 |
| Wien/Bécs | 0,8 | 9 | 1 | 0,05 |

**4. táblázat. Villámsűrűségi átlagok klasztere 32 év esetén**

Mindkét adatsorra látjuk az alábbiakban a klaszterfát.

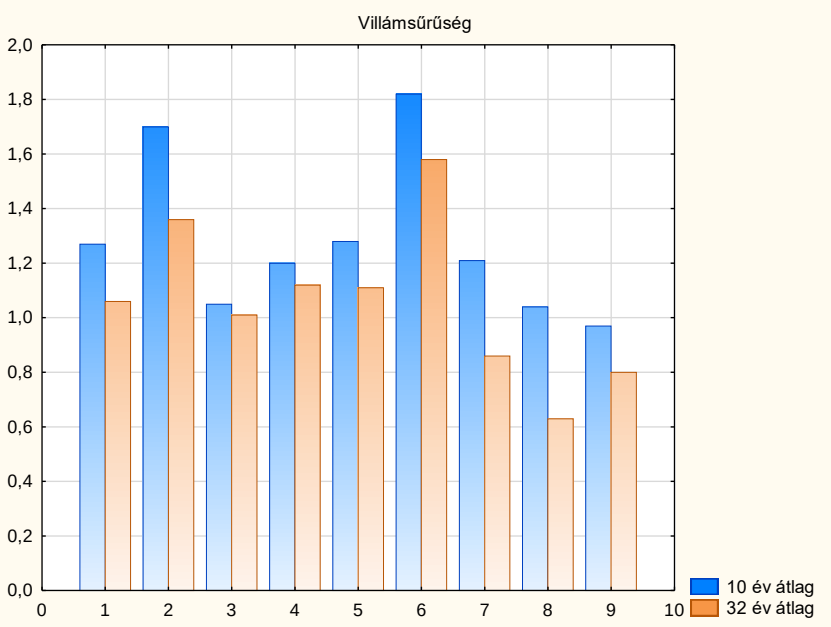



**1. ábra. Villámsűrűségi átlagok klaszterfája 10 év esetén**




**2. ábra. Villámsűrűségi átlagok klasztere 32 év esetén**

Az alábbi ábrán a klaszteranalízisben megadott szövetségi tartományi sorrendben szerepel két villámsűrűségi érték, kékkel jelölve a tíz év átlagértékeit, mely értékek az Aldis oldalán nyilvánosak, valamint a megadott 32 év adataiból szerző által számítottak.




**2. ábra. Villámsűrűségi átlagok**

## 2.2. 32 év éves adatsorának regressziós vizsgálata Stájerország esetén

Elsőként feltüntetésre kerül a 32 év leíróstatisztikai táblázata havi bontásban.

| | Havi leíróstatisztika a 32 évre | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Évek száma | Átlagos esetszám | Minimum | Maximum | Szórás |
| Jan. | 32 | 6,91 | 0,000 | 61,00 | 12,193 |
| Febr. | 32 | 5,66 | 0,000 | 47,00 | 10,114 |
| Márc. | 32 | 48,25 | 0,000 | 363,00 | 74,617 |
| Ápr. | 32 | 516,38 | 19,000 | 2668,00 | 612,743 |
| Máj. | 32 | 4882,84 | 294,000 | 26998,00 | 4937,903 |
| Jún. | 32 | 10189,75 | 1890,000 | 33784,00 | 6849,792 |
| Júl. | 32 | 13728,47 | 3529,000 | 33260,00 | 8791,817 |
| Aug. | 31 | 9537,58 | 2207,000 | 23173,00 | 5329,991 |
| Szept. | 31 | 1908,29 | 20,000 | 8407,00 | 2116,534 |
| Okt. | 31 | 220,29 | 0,000 | 1176,00 | 296,030 |
| Nov. | 31 | 15,90 | 0,000 | 114,00 | 27,800 |
| Dec. | 31 | 9,32 | 0,000 | 68,00 | 16,851 |

**5. táblázat. Villámgyakoriságok statisztikai adatai havi bontásban**

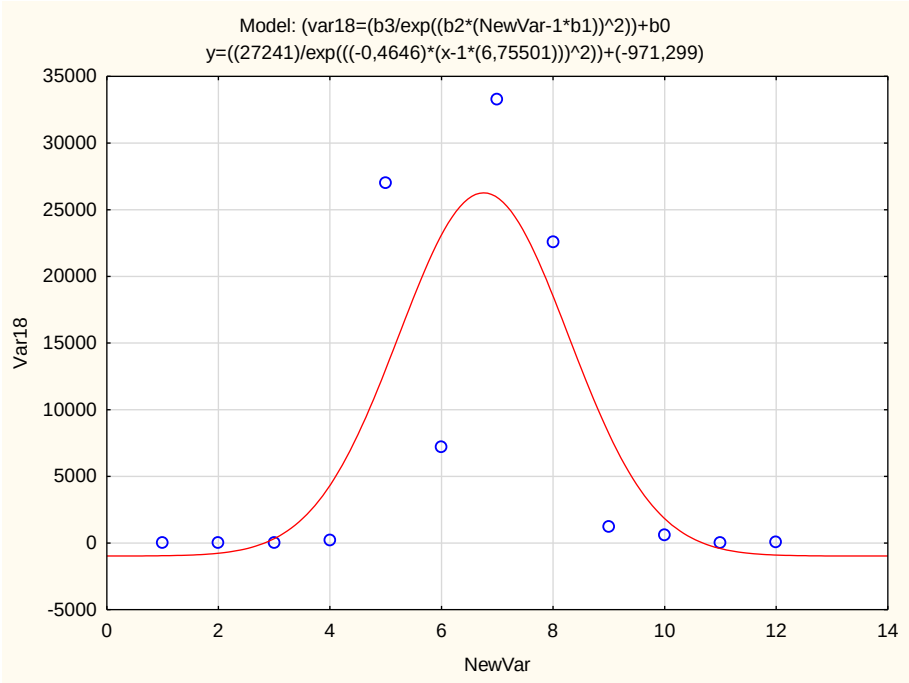
Az egyes illesztések eredményeinek részletes feltüntetésétől, az illesztések ábráinak bemutatásától a 32 évre nézve eltekintünk, a legkedvezőbb és legkedvezőtlenebb eset viszont az alábbiakban bemutatásra kerülnek.

A kiválasztás a korrelációs együttható értéke alapján történik, leszámítva az utolsó csonka évet, ahol az R értéke 0,9997, ami arra utal, hogy az adatsor illeszkedése nagyon jó, ezt viszont nagyban befolyásolja az utolsó 5 hónap adatának hiánya. Elsőként a 2009-es év illesztési eredményét prezentáljuk, ami szélsőségesen gyenge korrelációs értéket mutat R=0,8076. Ezt követően 2019-es év kerül bemutatásra R=0,9975 értékkel.

- A 2009-es év eredménye:

Model: var18=(b3/exp((b2*(NewVar-1*b1))^2))+b0 (STtáblafordítva)
Dep. var: Var18 Loss: (OBS-PRED)**2
Final loss: 587530179,78 R= ,80761 Variance explained: 65,224%

| N=12 | b3 | b2 | b1 | b0 |
|---|---|---|---|---|
| Estimate | 27240,9 | -0,46460 | 6,75500 | -971,29 |

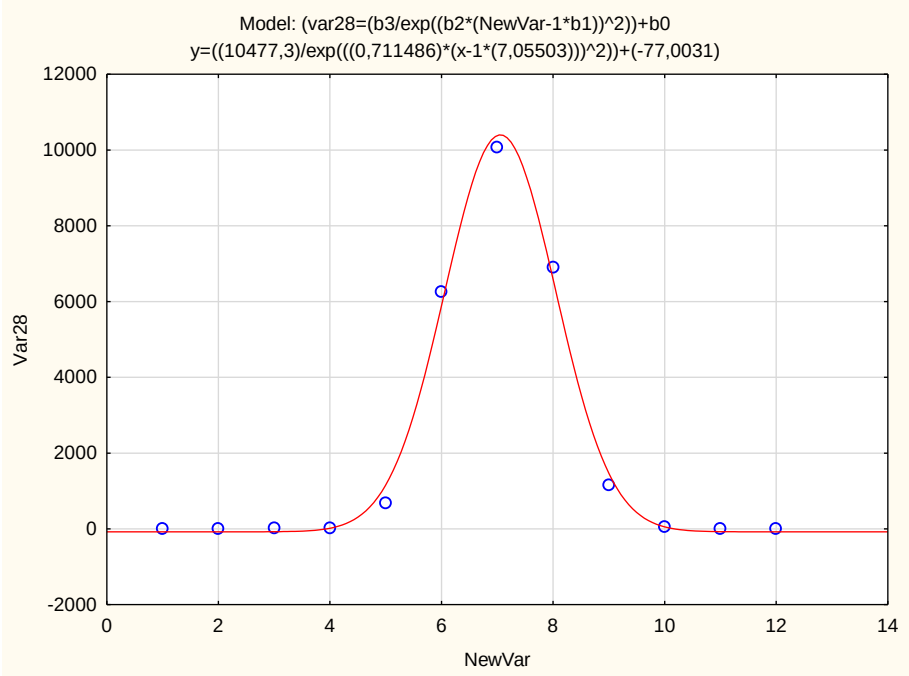



**3. ábra. Havi villámgyakoriság 2009**

- A 2019-es év eredménye:

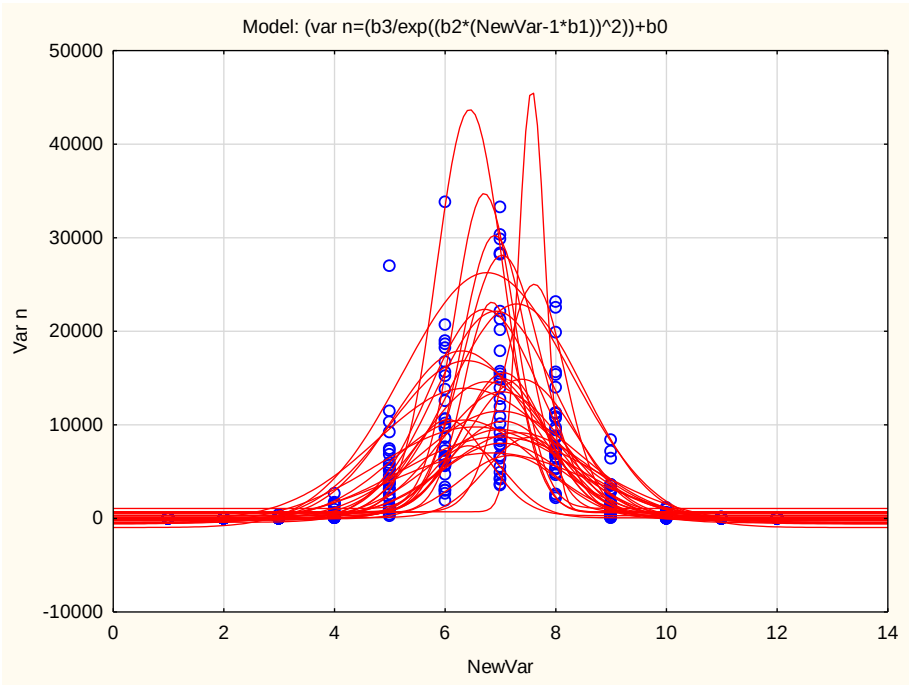
Model: var28=(b3/exp((b2*(NewVar-1*b1))^2))+b0 (STtáblafordítva)
Dep. var: Var28 Loss: (OBS-PRED)**2
Final loss: 687022,44568 R= ,99750 Variance explained: 99,500%

| N=12 | b3 | b2 | b1 | b0 |
|---|---|---|---|---|
| Estimate | 10477,2 | 0,71148 | 7,05502 | -77,003 |




**5. ábra. Havi villámgyakoriság 2019**

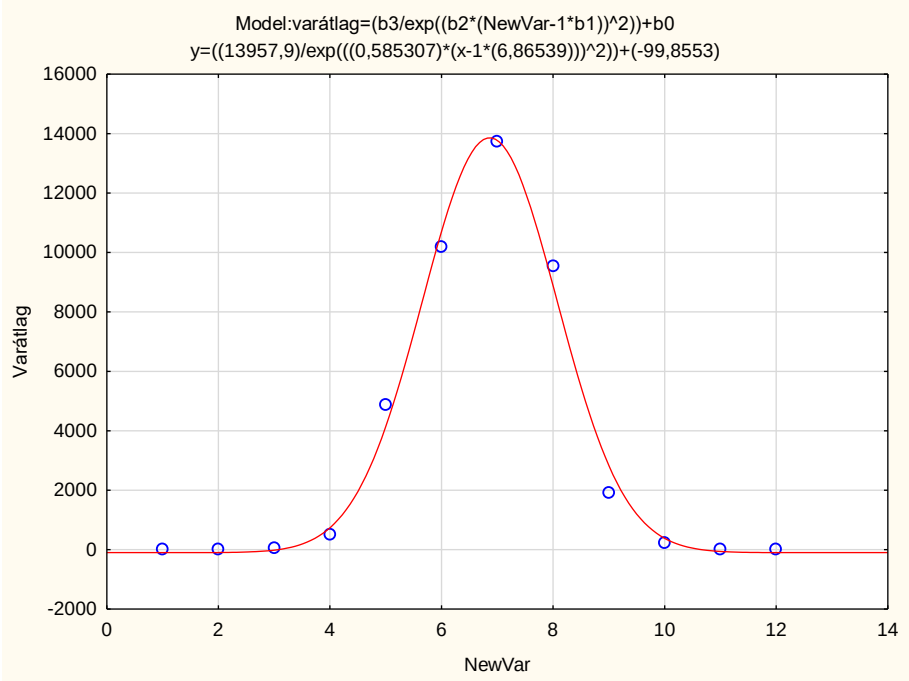
- 32 év illesztéseinek egyesített ábrája és az átlagolt adatokra illesztett modell eredményei:




**6. ábra. 32 év egyesített ábrája**

A 32 év átlagadataira történt illesztés korrelációs értéke magas, szoros illeszkedésre utal, a modell paraméterei lefedik a szélsőségeket.

| | Model: varátlag=(b3/exp((b2*(NewVar-1*b1))^2))+b0 (sthaviátlag)<br>Dep. var: Var2 Loss: (OBS-PRED)**2<br>Final loss: 2217498,3701 R= ,99589 Variance explained: 99,180% | | | |
|---|---|---|---|---|
| N=12 | b3 | b2 | b1 | b0 |
| Estimate | 13957,90 | 0,585307 | 6,865395 | -99,8553 |




**7. ábra. Illesztés az átlagadatokra**

A 6. táblázat a kiválasztott szövetségi tartomány adataira történő 32 illesztés egy paraméterét, az eltolási paramétert (Maximumérték hely becsült) valamint a mindenkori tényleges értéket mutatja. R az egyes illesztések nem lineáris korrelációs együtthatója. Eltekintünk a modell többi paraméterének megadásától, ami a szerzőnél rendelkezésre áll.

| Évek | Maximumérték helye becsült (hónap) | Maximumérték helye tényleges (hónap) | Korrelációs együttható R |
|---|---|---|---|
| 1992 | 7,31 | 8 | 0,9829 |
| 1993 | 6,92 | 7 | 0,9925 |
| 1994 | 7,61 | 8 | 0,9834 |
| 1995 | 7,06 | 7 | 0,9841 |
| 1996 | 6,35 | 6 | 0,8555 |
| 1997 | 6,99 | 7 | 0,9033 |
| 1998 | 6,72 | 7 | 0,993 |
| 1999 | 6,83 | 8 | 0,8362 |
| 2000 | 6,38 | 6 | 0,8869 |
| 2001 | 6,99 | 7 | 0,9492 |
| 2002 | 6,74 | 7 | 0,9881 |
| 2003 | 6,29 | 6 | 0,9718 |
| 2004 | 7,02 | 7 | 0,9746 |
| 2005 | 6,71 | 7 | 0,976 |
| 2006 | 6,44 | 6 | 0,9952 |
| 2007 | 6,39 | 6 | 0,8894 |
| 2008 | 7,29 | 8 | 0,9618 |
| 2009 | 6,76 | 7 | 0,8076 |
| 2010 | 7,03 | 7 | 0,9938 |
| 2011 | 6,96 | 8 | 0,8874 |
| 2012 | 6,89 | 7 | 0,9927 |
| 2013 | 7,57 | 8 | 0,899 |
| 2014 | 7,02 | 7 | 0,9833 |
| 2015 | 6,84 | 7 | 0,9745 |
| 2016 | 7,05 | 7 | 0,9911 |
| 2017 | 7,38 | 8 | 0,9336 |
| 2018 | 6,53 | 6 | 0,8432 |
| 2019 | 7,06 | 7 | 0,9975 |
| 2020 | 7,51 | 8 | 0,9942 |
| 2021 | 7,17 | 7 | 0,996 |
| 2022 | 6,05 | 6 | 0,9765 |
| 2023 | 6,42 | 6 | 0,9997 |

**6. táblázat. Illesztett függvények maximum helyei és korrelációs együtthatói**

A 32 évre az illesztés során kapott eltolási paraméter és korrelációs együttható néhány leíróstatisztikai jellemzői a következők:

| | Leíróstatisztika (max. hely és R) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Elemszám | Átlag | Konf. -95% | Konf. 95% | Minimum | Maximum | Szórás |
| Max. hely | 32 | 6,88 | 6,74 | 7,02 | 6,05 | 7,61 | 0,389 |
| R | 32 | 0,9498 | 0,9294 | 0,9702 | 0,8076 | 0,9997 | 0,05658 |

**7. táblázat. A maximum helyek és R értékek statisztikái**

## 2.3. Elemzés, értékelés

***Villámsűrűségi adatok klaszter elemzésének értékelése:***

A vizsgálat első lépésben 2012-2021 évek átlagainak felhasználásával indult, majd pedig 1992-2023 évek átlagaival folytatódott, mindkét esetben a 8 szövetségi tartomány és Bécs területére vonatkozóan. A számítások során alkalmazásra került a K-means clustering, aminél a választott klaszterszám mindkét esetben 3 volt. Ezt követően pedig a Joining (tree clustering), ugyancsak mindkét adathalmazra, ami a dendrogramot, klaszterfát adja.

A K-means clustering igazolja azt az adatokból is szembetűnő feltételezést, hogy a szövetségi tartományok közül két tartomány magas villámsűrűségi értékével eltér a többitől. A három klaszter csoport viszont indokolt. Összehasonlítva a vizsgált 10 és 32 éves átlagadatsort nem mutatkozik a klaszter csoportokban jelentős eltérés, mindössze két tartomány cserél helyet az 1 és 2 csoportokra nézve. Ez arra utal, hogy az átlagértékek változása nem jelentős az évek számát (10 illetve 32 év) illetően, az egyes klaszter csoportokba sorolt tartományok kettőt leszámítva fix helyükön maradtak. A kiugró legmagasabb értékekkel bíró tartományok tehát mindkét esetben Karintia és Stájerország maradt, szignifikánsan eltérve a többi tartomány értékétől.

***A Gauss görbe illesztésének eredményei és értékelése:***

A kiválasztott szövetségi tartomány, Stájerország 32 éves adatsorára történő illesztések a maximális villámgyakoriság értékekhez tartozó, időpont értékekre adnak becslési lehetőséget. A becsült értékek a transzformált Gauss görbe paraméteréből adottak. A maximumérték helyek (6. táblázat) statisztikai elemzése azt mutatja, hogy a legmagasabb átlagos villámsűrűségi érték 95%-os konfidencia szinten a hatodik hónap második felétől a hetedik hónap elejéig várható.

Az egyes illesztések korrelációs együtthatójának értéke, az adatsor várható ingadozása ellenére magas, a legkisebb R=0,8076 a legnagyobb R=0,9975. Itt eltekintünk a csonka 2023 év eredményétől, ami R=0,9997. 95%-os konfidencia szinten az R alsó határa 0,9294. Figyelembe véve a felsorolt értékeket kijelenthető, hogy a választott regressziós modell jól jellemezi a vizsgált trendet.

Az alábbi táblázat összefoglalja azon éveket, amelyek esetében az R értéke alacsonyabb az R alsó konfidencia határánál.

| Évek | R |
|---|---|
| 1996 | 0,8555 |
| 1997 | 0,9033 |
| 1999 | 0,8362 |
| 2000 | 0,8869 |
| 2007 | 0,8894 |
| 2009 | 0,8076 |
| 2011 | 0,8874 |
| 2013 | 0,8990 |
| 2018 | 0,8432 |

**8. táblázat. Gauss modell R összefoglaló**

A felsorolt 9 év bizonytalanságot mutat, azonban illesztési pontossága jónak mondható, ha figyelembe vesszük az adatsor jellegét.
Az illesztett modell X irányú eltolási paramétere a 32 évre nézve 13 évben mutatott a tényleges maximumérték helytől 5%-os hibánál nagyobb hibaértéket, két esetben haladta meg a 10%-t 14,6% és 13% értékkel, 1999 és 2011 esetén, amit igazol a korrelációs együttható gyengébb értéke is.
A 32 illesztés ábrája nem került egyenként bemutatásra, de a leggyengébb korrelációs együttható esete 2009 R=0,8076 jól mutatja, hogy az anomáliát, a nyári hónapok villámgyakoriságának véletlenszerű ingadozása okozza. A 8. táblázatban felsorolt évek esetén is ez volt jellemző, ami egyértelműen utal az adott év időjárási szélsőségességére. Természetesen szerepet játszhat a vizsgálat hibájában az is, hogy a 32 év során alkalmazott megfigyelő állomások technikai adottságai jelentős mértékben fejlődtek, az észlelések száma az idő múltával pontosabban regisztrált.
Összességében azonban kijelenthető, hogy a villámgyakoriság éves trendje jól jellemezhető az alkalmazott modell segítségével, a maximumérték helye a vizsgált 32 éves adatsor alapján jól becsülhető, a szélsőséges évek kimutathatók.

## Összefoglaló

A klímaváltozás napjainkban egyre indokoltabbá teszi, hogy speciális meteorológiai adatsorok statisztikai jellemzését is elvégezzük. Ezen adatsorok nem reprodukálhatók, egyedi mérések, melyek lehetnek hely és időfüggők. A vizsgálat tárgya a villámsűrűség, adott régiókban illetve a villámgyakoriság, adott területen idő függvényében. A felhasznált statisztikai elemzés a klaszteranalízis, aminek segítségével az egyes régiók csoportosíthatók, illetve a regresszióanalízis, melynek révén alkalmas modell segítségével jellemezhetjük a változó trendjét, ezt követően, pedig az alkalmazott modell paraméteréből megfelelő becslést végezhetünk.

Az eredmények azt mutatják, a villámsűrűségre vonatkozólag, hogy a vizsgált szövetségi tartományok csoportosíthatók, 3 csoportba, mind a 10, mind a 32 évi adatsor átlagai esetén. Nincs jelentős eltérés a két adatsor vizsgálata között, mindkét esetben a két legnagyobb értékkel jellemezhető tartomány szignifikánsan eltér a többitől.

A villámgyakorisági adatok 32 évi vizsgálatának illesztései azt igazolják, hogy a trend jól jellemezhető egy transzformált Gauss függvénnyel. A magas korrelációs együtthatók ellenére a maximumértékek helyének becslésében előfordulnak kisebb eltérések a tényleges értékektől. Az említett magas R érték viszont alkalmas arra, hogy általa kiszűrjük a szélsőséges éveket.

## Irodalomjegyzék

[1] **Csanády, V., Horváth-Szováti, E., Szalay, L.**, Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), 175p..
[2] AGES - Österreichische Agentur für Gesundheit und Ernährungssicherheit GmbH, https://www.aldis.at
[3] **Csanády, V.,** Időjárás elemzés regressziós eljárás alkalmazásával, Dimenziók, Matematikai Közlemények III. (2015) 25-34. doi:10.20312/dim.2015.04

doi:10.20312/dim.2023.04

# Többváltozós lineáris regresszió gyakorlati alkalmazásai STATISTICA13 programcsomag segítségével

**Horváth-Szováti Erika**
Soproni Egyetem, Informatikai és Matematikai Intézet
horvath-szovati.erika@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Egyszerű mintapéldákkal szemléltetjük a többváltozós lineáris regresszió gyakorlati alkalmazását. A programcsomag által megadott eredmények értelmezése és egyszerű esetekben számításokkal történő igazolása hallgatóink számára hasznos tudást nyújthat.

ABSTRACT. Here are simple practical examples that illustrate the practical use of multivariate linear regression. Interpreting the results of the program package and verifying them with calculations in simple cases can provide useful knowledge for the students.

## 1. Bevezetés

A többváltozós statisztikában használt eljárások a XX. század első felében születtek. A klasszikus módszerek (pl. a regresszióanalízis, varianciaanalízis és diszkriminancia-analízis) elsősorban a lineáris algebra eredményeire épülnek, normális eloszlású valószínűségi változókat használnak. Napjainkban a munkaerőpiacon az adatelemzésé a jövő, emiatt nagyon fontos a statisztika nyelvét értő és azon kommunikálni képes szakemberek képzése. Azokban a felsőoktatási intézményekben, ahol jelenleg a matematika oktatása egyre hátrányosabb helyzetbe kerül, a többváltozós statisztika tárgyalása komoly nehézséget jelenthet. A hallgatók csekély matematikai előképzettsége miatt az eljárások elméleti háttérből csak a legszükségesebb részek, azok is nagyrészt leegyszerűsítve kerülnek szóba. A gyakorlati alkalmazásra fókuszálunk, a módszerek lényegét mintapéldákon keresztül mutatjuk be a STATISTICA13 programcsomag segítségével.

## 2. Regresszióanalízis

A regresszióanalízis alapgondolata az, hogy egyes változók között ok–okozati összefüggést feltételezünk, amelynek leírására egy függvénykapcsolatot keresünk. Fontos megjegyezni, hogy az a fő különbség a korrelációszámítás és a regresszióanalízis között, hogy korrelációszámítás során nincsen feltételezett ok-okozati kapcsolat, minden változót valószínűségi változónak tekintünk. A többváltozós regresszióanalízis során több ismérv eredményváltozóra gyakorolt hatását vizsgáljuk. A többváltozós regresszió az ismérvek száma szerint lehet három-, négy-, öt- stb. változós (hiszen már egyváltozós függvény illesztésekor is két ismérv szerepel), a függvény típusa szerint pedig lineáris és nemlineáris. A többváltozós regressziószámítás modelljében az okot a magyarázó változókkal, más néven független (independent) változókkal ($X_1, X_2, \dots, X_m$), az okozatot pedig az eredmény változóval, más néven függő (dependent) változóval ($Y$) jelöljük, ez utóbbit tekintjük valószínűségi változónak,

amit a továbbiakban a „kalap” jelölés is mutat. A cél annak az $\hat{Y} = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ függvénykapcsolatnak a megtalálása, amely „kellően jól” írja le a vizsgált ok-okozati összefüggést. Itt csak a többváltozós lineáris esettel foglalkozunk, tehát jelen esetben $f$ lineáris függvény.

A többváltozós lineáris regresszió lépései a következők: 1. modellalkotás, 2. együtthatók meghatározása, 3. determinációs és korrelációs együtthatók kiszámítása, 4. megbízhatóság vizsgálata F-próbával, 5. együtthatók t-próbája, 6. validálás (esetleg további módszerek, mérőszámok, mutatók használata, amelyekkel meggyőződhetünk arról, hogy a modell megfelelő-e, majd jóváhagyás/elutasítás). Ebből a felsorolásból is látszik, hogy nem létezik egyetlen egy olyan mérőszám, ami megmutatná, hogy melyik függvény a „legjobb”. A végső modell kiválasztása a becslési pontosság és az egyszerűség kompromisszuma, nem elhanyagolva a szakmai (adott tudományterületre vonatkozó) szempontokat.

## 2.1. Korrelációs mátrix, többszörös determinációs együttható

A statisztika tanulmányainkból ismert, hogy két változó közötti lineáris korreláció mérőszámát $r$-rel jelöljük, $r \in [-1, 1]$. Ha $r = 1$ (vagy $r = -1$), akkor a mérési pontok 1 valószínűséggel egy növekvő (vagy csökkenő) egyenesen helyezkednek el, azaz lineáris kapcsolat van közöttük. Emiatt az $r$ úgy is tekinthető, mint a linearitás mérőszáma. Ha két adatsor független egymástól, akkor $r = 0$ , tehát a függetlenségből következik a korrelálatlanság. Ha $r = 0$, azaz korrelálatlanság áll fenn, ebből nem feltétlen következik a két változó függetlensége (csupán a lineáris kapcsolat hiánya). Kettőnél több változó esetén a korreláció szorosságáról háromféle értelemben beszélhetünk. Mérhető az eredményváltozó és az összes tényezőváltozó közötti kapcsolat szorossága, emellett vizsgálható az egyes változók közötti kapcsolat páronként (a páronkénti korrelációs együtthatók), továbbá páronként, de a többi változó hatásának kiszűrésével is (a parciális korrelációs együtthatók) is. Alább ezt a három lehetőséget is tárgyaljuk.

Többváltozós regresszió esetén jelöljük az $i$-edik és $j$-edik változó korrelációját $r_{ij}$-vel, és ezekből a páronkénti korrelációs együtthatókból összeállíthatjuk az ún. korrelációs mátrixot. A korrelációs mátrix minden elemére $r_{ij} \in [-1, 1]$, továbbá $r_{yy} = r_{11} = r_{22} = \dots = r_{mm} = 1$ (a regressziós modellben a független változók száma $m$), és a főátlójára szimmetrikus mátrix:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} & \dots & r_{ym} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{my} & r_{m1} & r_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

A korrelációs mátrixból megállapítható, hogy melyek azok a magyarázó változók, amelyek szorosabb kapcsolatban vannak a függő változóval, és melyek azok, amelyek kevésbé. A korrelációs mátrix inverze ($\boldsymbol{R}^{-1}$):

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \begin{pmatrix} q_{yy} & q_{y1} & q_{y2} & \dots & q_{ym} \\ q_{1y} & q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1m} \\ q_{2y} & q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{my} & q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

A (2) mátrix első sora első elemének ( $q_{yy}$) segítségével meghatározható az ún. többszörös korrelációs együttható:

$$R_{y.1,2,3,\dots m} = \sqrt{1 - \frac{1}{q_{yy}}}\ , \qquad R_{y.1,2,3,\dots m} \in [0,1]\ . \tag{3}$$

Ez valójában egy speciális kétváltozós korrelációs együttható (erre az indexében a felsorolást kettéválasztó pont karakter is utal), amely a mért $Y$-ok és az $X_1, X_2, \dots, X_m$ tényezőváltozók alapján becsült $\hat{Y}$ kapcsolatának szorosságát méri többváltozós lineáris modell esetén. Vannak olyan irodalmak, amelyekben a (3)-ban szereplő alsó indexre az $Y(X_1, X_2, \dots, X_m)$ jelölést használják, ez talán még szemléletesebben tükrözi a jelentését. A többszörös korrelációs együttható négyzetét többszörös determinációs együtthatónak nevezzük:

$$R^2_{y.1,2,3,\dots m} = 1 - \frac{1}{q_{yy}}\ , \qquad R^2_{y.1,2,3,\dots m} \in [0,1]\ . \tag{4}$$

Ennek használatával számszerűsíthető a regressziós függvénnyel történő „magyarázat jósága", az illeszkedés szorossága, az „előrejelzés hibájának nagysága". Ha $m = 1$, akkor a többszörös determinációs együttható a függő- és az egyetlen független változó közötti $r^2$ determinációs együtthatóval egyenlő, azaz $R^2_{y.1} = r^2$. Az $r^2$ egyben a linearitás mérőszáma is, értéke minél közelebb esik 1-hez, a megfigyelési értékek annál jobban tömörülnek egy egyenes mentén (annál inkább igazoltnak látszik a linearitási feltevés). Az $R^2_{y.1} = r^2$ egyenlőség bizonyítása alapszintű lineáris algebrai ismeretek segítségével is nagyon egyszerű, ezért ezt érdemes megtennünk. Célszerű már az elején bevezetni az $r_{y1} = r_{1y} = r$ jelölést. A nevezők miatt felmerülhet az $r \neq \pm 1$ kikötés szükségessége is, de az $r = \pm 1$ eset ellentmondana a többváltozós lineáris regresszió egyik alkalmazhatósági feltételének (multikollinearitás kizárása), így soha nem áll fenn a többváltozós lineáris korreláció alkalmazásakor.

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & r_{y1} \\ r_{1y} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-r^2} & \frac{-r}{1-r^2} \\ \frac{-r}{1-r^2} & \frac{1}{1-r^2} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$R^2_{y.1} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-r^2}} = r^2. \tag{7}$$

Az egyváltozós függvény illesztésekor (tehát két változó esetén) használt determinációs együttható egyben azt is megmutatja, hogy a függő változó teljes szórásnégyzetének mekkora hányada magyarázható a független változóval, tehát a regressziós függvénnyel. Bizonyítható, hogy ugyanez a többszörös determinációs együtthatóra is igaz (ennek levezetésével itt nincs értelme foglalkoznunk), azaz felírható a többváltozós modellben alkalmazott eltérés négyzetösszegek hányadosaként is:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}\ . \tag{8}$$

A (7)-ben és azt megelőzően használt alsó indexek a gyakorlatban akár el is hagyhatók, (8)-ban már nem írtuk ki. A (8)-ban szereplő jelölések értelmezéséhez definiálnunk kell az alább olvasható négyzetösszegeket ($SS$ =Sum of Squares), ahol $n$ a mérések számát jelöli. Teljes

eltérés négyzetösszeg: $SST = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ , a regresszió által meghatározott eltérés négyzetösszeg: $SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$, valamint a reziduális eltérés négyzetösszege (más néven maradékok négyzetösszege, ami a mérés „hibáiból" származtatható): $SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$. A függő változó átlagtól vett eltérés négyzetösszege felbontható a regressziós becslések átlagtól vett eltérés négyzetösszegének és a reziduális négyzetösszegnek az összegére: $SST = SSR + SSE$.

Az (1) korrelációs mátrixban szereplő páronkénti korrelációs együtthatókból is kiszámítható az $R^2$ többszörös determinációs együttható. Egy eredményváltozó és két magyarázó változó esetén a következő összefüggés használatos:

$$R^2 = \frac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2}. \qquad (9)$$

A többszörös determinációs együttható azt adja meg, hogy a függő változó teljes szórásnégyzetéből mekkora a tényezőváltozókkal (tehát a regresszióval) magyarázható hányad. Másképp fogalmazva $R^2$ nagysága a regressziós függvény magyarázó erejét mutatja meg, $R^2 \in [0,1]$, értékét %-ban szokás megadni. Az $R^2 = 1$ eset akkor áll fenn, ha az $X_1, X_2, \dots, X_m$ változók determinisztikusan meghatározzák az $Y$ -t. Ha $R^2 = 0$, akkor az $Y$ értékeinek szóródását teljes egészében a véletlen határozza meg. Ha ugyanazon minta esetén a magyarázó változók számát növeljük a regressziós modellben, akkor $R^2$ értéke automatikusan nő, és túl pozitív képet mutat az illeszkedésről. Így tehát a magas $R^2$ önmagában még nem feltétlenül jelent „jó" regressziós függvényt, az optimális modell változóinak kiválasztását nem célszerű kizárólag az $R^2$ mutatók alapján végezni.

## 2.2. Parciális korrelációk, szabadságfokkal korrigált $R^2$

Az (1) korrelációs mátrixban szereplő páronkénti korrelációs együtthatókból meghatározhatók az ún. parciális korrelációk is. Számításuk során két meghatározott változó közötti korreláció mérése valósul meg úgy, hogy minden további változó konstansként szerepel. Két magyarázó változós lineáris regresszió esetén jelölésük: $r_{y1.2}$, $r_{y2.1}$, $r_{12.y}$. Jelentésük: $r_{y1.2}$ például az $y$ és $x_1$ kapcsolatának szorosságát méri, miközben $x_2$ hatását kiszűrjük, a többi ehhez hasonlóan. Parciális korreláció alkalmazása főleg akkor célszerű, ha két adatsor között sejtjük a kapcsolatot, de nem tudjuk kimutatni, mert egy harmadik adatsor eltakarja az összefüggést. A kapott eredmény $r_{y1.2}$, $r_{y2.1}$, $r_{12.y} \in [-1,1]$, értelmezése ugyanúgy történik, mint ahogy két változó lineáris korrelációjánál szokásos. A parciális korreláció abszolút értéke a két kiválasztott változó lineáris kapcsolatának szorosságát, az előjel pedig az irányát mutatja meg (pozitív esetben az összefüggést jellemző egyenes emelkedő, negatív esetben csökkenő), miközben a többi változó hatását figyelmen kívül hagyjuk. Az alábbi képletekkel számíthatók:

$$r_{y1.2} = \frac{r_{y1} - r_{y2}r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{y2}^2)\cdot(1 - r_{12}^2)}}, \quad r_{y2.1} = \frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{y1}^2)\cdot(1 - r_{12}^2)}}, \quad r_{12.y} = \frac{r_{12} - r_{y1}r_{y2}}{\sqrt{(1 - r_{y1}^2)\cdot(1 - r_{y2}^2)}}. \quad (10)\text{-}(12)$$

Mivel nem a tökéletes, hanem a minél jobb modellt keressük, gyakran a különböző modellváltozatok összehasonlítását is el szeretnénk végezni. A legegyszerűbb (legkevesebb magyarázó változót tartalmazó) modell felírása a cél, mert a magyarázó változók számának növekedésével a multikollinearitás veszélye is megnő. Egymással lineárisan összefüggő magyarázó változók nem használhatók, szelektálni kell őket. Ezt segítheti a Theil-féle, szabadságfokkal korrigált $R^2$ (adjusztált $R^2$) , amit minden jelentősebb regressziós programcsomag kiszámít:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-m-1}(1-R^2) \quad , \tag{13}$$

ahol $n$ a mérések száma, $m$ a magyarázó változók száma. Tulajdonságaiban hasonlít az eredeti $R^2$-hez, viszont „bünteti" azt, ha túl sok magyarázó változót vonunk be a modellbe. A javaslat szerint azt a modellt célszerű választani, amelyik esetén az $\bar{R}^2$ maximális. Annál jobb a modell, minél közelebb van egymáshoz a korrigált és a korrigálatlan $R^2$ érték. A korrigált $R^2$ használatának is vannak hátrányai. Ha az $\bar{R}^2$-et mintából számítjuk, akkor valószínűségi változó, eloszlása függ a modell többi változójától, ezért a különböző modellek $\bar{R}^2$mutatói nem hasonlíthatók közvetlenül össze. Belátható, hogy ha $R^2$ olyan kicsi, hogy $R^2 < \frac{m}{n-1}$, akkor a korrigált $\bar{R}^2$ negatív lesz, összehasonlításra ilyenkor nem alkalmas. Mindezek ellenére az $\bar{R}^2$ kritériumot széles körben használják a többváltozós lineáris regresszió során, és legtöbbször helyes modellt eredményez.

# 3. Mintapéldák

## 3.1. Mintapélda

Az adatsor 30 dolgozó tanulmányi idejét ($x_1, [év]$), a munkában töltött éveinek számát ($x_2, [év]$) és a nettó munkabérét ($y, [100\ ezer\ Ft]$) tartalmazza. Az adatokra STATISTICA13 programcsomaggal többváltozós lineáris regressziós függvényt illesztettünk, és az 1.a-d. táblázatokban lévő eredményeket kaptuk ($\alpha = 0{,}05$ szignifikancia szinten dolgoztunk, $v1\sim$ tanulmányi idő években, $v2\sim$ munkában töltött évek, $v3\sim$ fizetés).

Regression Summary for Dependent Variable: v3 (01_Többváltozós lin regr_példák_STATISTICA (C3:AF32))
R= ,96873287 R2= ,93844338 Adjusted R2= ,93388363
F(2,27)=205,81 p<,00000 Std.Error of estimate: ,33791

| N=30 | b* | Std.Err. of b* | b | Std.Err. of b | t(27) | p-value |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Intercept** | | | -2,19850 | 0,302236 | -7,27410 | 0,000000 |
| v1 | 0,775550 | 0,047874 | 0,34337 | 0,021196 | 16,19986 | 0,000000 |
| v2 | 0,527007 | 0,047874 | 0,07714 | 0,007007 | 11,00824 | 0,000000 |

Analysis of Variance; DV: v3 (01_Többváltozós lin regr_példák_STATISTICA (C3:AF32))

| Effect | Sums of Squares | df | Mean Squares | F | p-value |
|---|---|---|---|---|---|
| **Regress.** | 47,00006 | 2 | 23,50003 | 205,8103 | 0,000000 |
| Residual | 3,08294 | 27 | 0,11418 | | |
| Total | 50,08300 | | | | |

Variables currently in the Equation; DV: v3 (01_Többváltozós lin regr_példák_STATISTICA (C3:AF32))

| Variable | b* in | Partial Cor. | Semipart Cor. | Tolerance | R-square | t(27) | p-value |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **v1** | 0,775550 | 0,952216 | 0,773511 | 0,994750 | 0,005250 | 16,19986 | 0,000000 |
| v2 | 0,527007 | 0,904318 | 0,525622 | 0,994750 | 0,005250 | 11,00824 | 0,000000 |

Correlations (01_Többváltozós lin regr_példák_STATISTICA (C3:AF32))

| Variable | v1 | v2 | v3 |
|---|---|---|---|
| **v1** | 1,000000 | 0,072457 | 0,813735 |
| v2 | 0,072457 | 1,000000 | 0,583201 |
| v3 | 0,813735 | 0,583201 | 1,000000 |

1. **a-d. táblázatok**

Feladatok, kérdések:

I. Írja fel a regressziós egyenletet és értelmezze a paramétereket! Használja az 1.a táblázat adatait!

II. Mekkora a becsült fizetése egy 11 év tanulmányi idővel rendelkező szakmunkásnak 15 munkában eltöltött év után?

III. Írja le a paraméterek F-próbával történő tesztelésének gondolatmenetét az 1.b táblázat adatainak felhasználásával (globális tesztelés), dolgozzon 5%-os szignifikancia szinten!

IV. Írja le a paraméterek t-próbával történő tesztelésének gondolatmenetét az 1.a (vagy 1.c) táblázat adatainak felhasználásával (parciális tesztelések), használjon 5%-os szignifikancia szintet! Számítással ellenőrizze a táblázatban szereplő próbastatisztikákat, és indokolja a programcsomag által használt szabadságfokot!

V. Határozza meg a többszörös korrelációs és determinációs együtthatót a (8), illetve a (9) összefüggés segítségével is, és értelmezze a kapott eredményt! A számításhoz szükséges adatok az 1.a-d táblázatokban megtalálhatók. (Ugyaninnen az eredmények is leolvashatók, ezt csak ellenőrzésre használja!)

VI. Számítsa ki a parciális korrelációkat a (10)-(12) képletekkel, és ellenőrizze az 1.a-d. táblázatok segítségével! Értelmezze a kapott eredményeket, és hasonlítsa össze őket a páronkénti (teljes) korrelációkkal, amelyek szintén az 1.a-d táblázatokban találhatók!

Megoldás:

I. A kétváltozós lineáris regressziós modell $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$. Az 1.a táblázat harmadik oszlopában lévő együtthatókat behelyettesítve (két tizedesjegyre kerekítve): $\hat{y} = -2{,}20 + 0{,}34x_1 + 0{,}08x_2$. A $b_1 = 0{,}34$ jelentése: ugyanannyi munkában töltött év esetén, ha a munkavállaló egy évvel több tanulmányi idővel rendelkezik, akkor kb. 34 ezer Ft-tal magasabb a fizetése. A $b_2 = 0{,}08$ értelmezése: azonos tanulmányi idő esetén egy évvel több munkában töltött idő kb. 8 ezer Ft-tal több fizetést eredményez.

II. A becsült fizetés $x_1 = 11,\ x_2 = 15$ esetén: $\hat{y} = -2{,}20 + 0{,}34 \cdot 11 + 0{,}08 \cdot 15 = 2{,}74$, azaz kb. $274000$ Ft.

III. Az F-próba szokásos lépései (a statisztikai szakirodalomban megtalálható a lépések jelentése, itt nem részletezzük):
1. $H_0$: $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,
2. $H_1$: $\exists i: \beta_i \neq 0$, ahol $i = 1{,}2$ .
3. Szignifikanciaszint: $\alpha = 0{,}05$.
4. A próbastatisztika: $F_0 = 205{,}8$, és a hozzá tartozó valószínűség („jobbról”): $p \approx 0$.
5. Döntés: $F_{krit} < F_0$, így elutasítjuk a $H_0$ hipotézist.
6. Következtetés: 5%-os szignifikancia szinten legalább az egyik magyarázó változó szignifikáns.

IV. A t-próba gondolatmenete (a statisztikai alapokat itt is ismertnek tételezzük fel).
1. $H_0$: $\beta_1$=0, ill. $H_0$: $\beta_2 = 0$ ,
2. $H_1$: $\beta_1 \neq 0$, ill. $H_1$: $\beta_2 \neq 0$.
3. Szignifikanciaszint: $\alpha = 0{,}05$.
4. Kétoldali t-próbák $\nu = n - m - 1 = 30 - 2 - 1 = 27$ szabadságfokkal (ahol $n$ az adatok száma, $m$ az ismeretlenek száma). A próbastatisztikák értékei a következő képletekkel számíthatók (ellenőrizni az 1.a táblázat $t(27)$ oszlopa segítségével lehet):

$$t_{0(b_1)} = \frac{b_1 - \beta_1}{\hat{S}_{b_1}} = \frac{0{,}34337 - 0}{0{,}02116} = 16{,}1998, \qquad (14)$$

$$t_{0(b_2)} = \frac{b_2 - \beta_2}{\hat{S}_{b_2}} = \frac{0{,}07714 - 0}{0{,}007007} = 11{,}0090. \quad (15)$$

Mindkét próbastatisztikához $p \approx 0$ valószínűség tartozik (ld. 1.a vagy 1.c táblázat).

5. Döntés: Mindkét esetben $t_{krit} < t_0$, így elutasítjuk mindkét $H_0$ hipotézist.
6. Következtetés: 5%-os szignifikancia szinten mindkét magyarázó változó szignifikáns.

V. A többszörös determinációs együttható

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{47{,}00006}{50{,}08300} \approx 0{,}93844, \quad (16)$$

ahol a (8) összefüggést és az 1.b táblázat 1. oszlopát használtuk. Ugyanez kiszámítható a (9) összefüggéssel az 1.d táblázatban megadott korrelációs mátrixban szereplő páronkénti korrelációs együtthatókból is. Mindkét esetben közelítőleg ugyanazt az eredményt kapjuk, jelentése: a felírt regressziófüggvényben a tanulmányi idő és a munkában töltött évek száma együttesen a fizetés szórásnégyzetének (ingadozásának) kb. 94%-át magyarázza. Ellenőrzésül szolgálhat az 1.a táblázat fejléce, ahol ez az adat megtalálható. Az előbbi eredmény négyzetgyöke a többszörös korrelációs együttható: $R_{y.1,2} \approx 0{,}96873$. Ez azt mutatja, hogy a felírt kétváltozós lineáris modell segítségével nagyon jól leírható a munkabér, a magyarázó változók és a fizetés között kifejezetten erős kapcsolat van. A programcsomag az 1.a táblázat fejlécében az $R$ értéket is megadja.

VI. A munkabér $(y)$ és a tanulmányi idő $(x_1)$ közötti parciális korreláció, vagyis az $y$ és $x_1$ közötti kapcsolat szorossága a munkában eltöltött évek száma $(x_2)$ hatásának kiszűrésével a (10) képlettel számítható ki, az ehhez szükséges páronkénti korrelációk az 1.d táblázatban találhatók:

$$r_{y1.2} = \frac{r_{y1} - r_{y2}r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{y2}^2)\cdot(1 - r_{12}^2)}} \approx \frac{0{,}81374 - 0{,}58320 \cdot 0{,}07246}{\sqrt{(1 - 0{,}58320^2)\cdot(1 - 0{,}07246^2)}} \approx 0{,}952215. \quad (17)$$

Látható, hogy y és $x_1$ között rendkívül szoros pozitív parciális korreláció van, azaz ugyanannyi munkában töltött év esetén hosszabb tanulmányi időhöz szinte mindig magasabb fizetés tartozik. Ezt az eredményt az 1.c táblázat 2. oszlopában találjuk (azért használtunk a számolás során 5 tizedesjegyet, hogy jól látható legyen a két érték egyezése). Az y és $x_1$ közötti páronkénti (teljes) korrelációt és parciális korrelációt összehasonlítva azt tapasztaljuk, hogy a munkában töltött időn keresztül érvényesülő közvetett hatás kiszűrésével a munkabér és a tanulmányi idő közötti kapcsolat tovább erősödött $(r_{y1} < r_{y1.2})$. Az $r_{y2.1} \approx 0,9043$ parciális korreláció a (11) képlettel az előbbiekhez hasonlóan számítható, és az eredmény az 1.c táblázatból ellenőrizhető. Eszerint y és $x_2$ szoros pozitív parciális korrelációban állnak egymással, a tanulmányi idő hatásának kiszűrésével a munkabér és a munkában töltött idő hossza közötti kapcsolat még erősebb lett $(r_{y2} < r_{y2.1})$.

A (12) összefüggésbe történő behelyettesítéssel $r_{12.y} \approx -0{,}8517$. Ez a parciális korrelációs együttható azt mutatja, hogy ha a fizetés összegét rögzítjük, akkor a tanulmányi idő $(x_1)$ és a munkában töltött évek száma $(x_2)$ közötti lineáris korrelációs együttható előjele megfordul. Ez úgy értelmezhető, hogy az adatok kb. 85%-ára igaz, hogy ugyanannyi munkabér alacsonyabb iskolázottság esetén hosszabb munkában töltött idő mellett, illetve hosszabb tanulmányi idő esetén rövidebb munkaviszonnyal valósul meg.

## 3.2. Mintapélda

Egy mezőgazdasági területen megfigyelték a munkaráfordítást ($x_1$ [ezer óra/hektár]), az öntözővíz mennyiségét ( $x_2$ [ezer $m^3$ /hektár]), valamint a termés mennyiségének ( $y$ [mázsa/hektár]) alakulását. A 22 db adatra STATISTICA13 programcsomaggal többváltozós lineáris regressziós függvényt illesztettünk, és a 2.a-d. táblázatokban lévő eredményeket kaptuk ($\alpha = 0{,}05$ szignifikancia szinten dolgoztunk).

Regression Summary for Dependent Variable: termés (mázsa/hektár) (többvált_lin_regr)
R= ,96567839 R2= ,93253475 Adjusted R2= ,92543315
F(2,19)=131,31 p<,00000 Std.Error of estimate: ,17523

| N=22 | b* | Std.Err. of b* | b | Std.Err. of b | t(19) | p-value |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Intercept** | | | 4,274380 | 0,375105 | 11,39515 | 0,000000 |
| munka ( ezer óra/hektár) | 0,911254 | 0,064003 | 0,536311 | 0,037668 | 14,23772 | 0,000000 |
| öntözővíz (ezer m3/hektár) | 0,128686 | 0,064003 | 0,628222 | 0,312450 | 2,01063 | 0,058774 |

Analysis of Variance; DV: termés (mázsa/hektár) (többvált_lin_regr)

| Effect | Sums of Squares | df | Mean Squares | F | p-value |
|---|---|---|---|---|---|
| **Regress.** | 8,064306 | 2 | 4,032153 | 131,3132 | 0,000000 |
| Residual | 0,583421 | 19 | 0,030706 | | |
| Total | 8,647727 | | | | |

Variables currently in the Equation; DV: termés (mázsa/hektár) (többvált_lin_regr)

| Variable | b* in | Partial Cor. | Semipart Cor. | Tolerance | R-square | t(19) | p-value |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **munka ( ezer óra/hektár)** | 0,911254 | 0,956192 | 0,848406 | 0,866819 | 0,133181 | 14,23772 | 0,000000 |
| öntözővíz (ezer m3/hektár) | 0,128686 | 0,418857 | 0,119811 | 0,866819 | 0,133181 | 2,01063 | 0,058774 |

Correlations (többvált_lin_regr)

| Variable | munka ( ezer óra/hektár) | öntözővíz (ezer m3/hektár) | termés (mázsa/hektár) |
|---|---|---|---|
| **munka ( ezer óra/hektár)** | 1,000000 | 0,364940 | 0,958217 |
| öntözővíz (ezer m3/hektár) | 0,364940 | 1,000000 | 0,461239 |
| termés (mázsa/hektár) | 0,958217 | 0,461239 | 1,000000 |

**7. a-d. táblázatok**

Feladatok, kérdések:

I. Írja fel a regressziós egyenletet és értelmezze a paramétereket!
II. Mekkora a modell alapján becsült termés egy hektáron 3000 munkaóra és 1500 $m^3$öntözővíz esetén ($x_1 = 3,\ x_2 = 1{,}5$)?
III. Tesztelje a paramétereket F-próbával 5%-os szignifikancia szinten (globális tesztelés), használja a programcsomag eredmény-táblázatát!
IV. Tesztelje a paramétereket t-próbával 5%-os szignifikancia szinten (parciális tesztelések)!
V. Számítsa ki a többszörös korrelációs és determinációs együtthatót, majd értelmezze a kapott eredményt!
VI. Számítsa ki a parciális korrelációkat, értelmezze a kapott eredményt, és hasonlítsa össze a teljes korrelációkkal!
VII. Hozzon döntést arról, hogy érdemes-e a felírt modellen változtatni, és ha igen, akkor az $\bar{R}^2$ (szabadságfokkal korrigált $R^2$ ) értékek kiszámítása alapján javasoljon másik modellt!

Megoldás:
Csak a IV., VI. és VII. kérdésre térünk ki részletesen, a többi esetén a 3.1. Mintapélda megoldása nyújthat segítséget.

IV. A t-próba menete is hasonló a 3.1. Mintapélda IV. pontjához, de az egyik próbastatisztikához tartozó valószínűség értéke, és emiatt a döntés és következtetés más. A 2.c táblázatból leolvasható, hogy a $t_{0(b_1)} \approx 14{,}24$ próbastatisztikához $p \approx 0$ valószínűség tartozik, emiatt a munkaóra ($x_1$) magyarázó változó 5%-os szignifikancia szinten szignifikáns (pirossal jelöli a programcsomag), de a $t_{0(b_2)} \approx 2{,}01$ próbastatisztikához tartozó valószínűség $p \approx 0{,}06$, tehát az öntözővíz mennyisége ($x_2$) magyarázó változó nem szignifikáns ugyanezen a szignifikancia szinten (fekete színnel jelöli az eredménytáblázat).

VII. A programcsomag által megadott korrelációs mátrixban lévő elemekkel számolunk (2.d táblázat). A termés ($y$) és a munkaórák ($x_1$) közötti parciális korreláció az öntözővíz ($x_2$) hatásának kiszűrésével $r_{y1.2} \approx 0{,}9562$, ami erős pozitív korrelációt mutat. Ha ezt az eredményt az $y$ és $x_1$ közötti páronkénti (teljes) korrelációval összehasonlítjuk, akkor látható, hogy az öntözővíz mennyisége által érvényesülő közvetett hatást kiszűrve a termés és a munkaráfordítás közötti kapcsolat nem változott ($r_{y1} = 0{,}9582$; $r_{y1.2} \approx 0{,}9562$). Az $r_{y2.1} \approx 0{,}4189$, ami azt mutatja, hogy a munkaórák ($x_1$) hatását kiszűrve a terméshozam ($y$) és az öntözés ($x_2$) között az gyenge pozitív korrelációt tapasztalunk. Ezáltal a terméshozam és az öntözés közötti kapcsolat kis mértékben gyengült ($r_{y2} = 0{,}46123$; $r_{y1.2} \approx 0{,}4189$). Az $x_1$ és $x_2$ közötti parciális korreláció $r_{12,y} \approx -0{,}3035$, azaz, ha rögzítjük a termés mennyiségét, akkor $x_1$ és $x_2$ között csekély mértékű negatív korreláció van. Tehát az esetek kb. 30%-ára igaz az, hogy ugyanaz a terméshozam kevesebb öntözés és több munkaóra, vagy több öntözés és kevesebb munkaóra mellett tapasztalható.

VIII. Kiszámítható, hogy az egyes magyarázó változók, illetve az együttes hatásuk hogyan járul hozzá az $R^2$ értékhez. Az $x_1$ hozzájárulása $R^2$-hez (az $R^2$ értéke a 2.a táblázat fejlécében található):

$$R^2 - r_{y2}^2 = 0{,}9325 - (0{,}4612)^2 = 0{,}7198. \tag{18}$$

Az $x_2$ hozzájárulása $R^2$-hez:

$$R^2 - r_{y1}^2 = 0{,}9325 - (0{,}9582)^2 = 0{,}0144. \tag{19}$$

Az $R^2$-ből fennmaradó rész az $x_1$ és $x_2$ együttes hatása, ahogy ezt a 3. táblázat mutatja.

| magyarázó változó | magyarázó változó hozzájárulása $R^2$ -hez |
|---|---|
| $x_1$ | 0,7198 |
| $x_2$ | 0,0144 |
| $x_1$és $x_2$ (együttes hatás) | 0,1983 |
| **Összesen** | $\mathbf{0,9325}$ |

**8. táblázat**

Látható, hogy ha az egyes változók hatásához hozzáadjuk az együttes hatást, visszakapjuk a páronkénti determinációs együtthatókat:

$$r_{y1}^2 = 0{,}7198 + 0{,}1983 = 0{,}9181, \qquad r_{y1} = 0{,}9582, \tag{20}$$

$$r_{y2}^2 = 0{,}0144 + 0{,}1983 = 0{,}2127, \qquad r_{y2} = 0{,}4612. \tag{21}$$

Arról, hogy érdemes-e esetleg elhagyni valamelyik változót, és ha igen, akkor melyiket, a korrigált $R^2$ értékek kiszámítása segítségével hozhatunk döntést. Két változóra a (13) képletbe történő behelyettesítéssel az alábbi eredményt kapjuk (adatok száma $n = 22$, változók száma $m = 2$), ezt a STATISTICA13 programcsomag is megadja a 2.a táblázat felső fejlécében „Adjusted R2" néven:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-m-1} \cdot (1 - R^2) = 1 - \frac{22-1}{22-2-1} \cdot (1 - 0{,}9325) = 0{,}9254 = \bar{R}_{12}^2. \tag{22}$$

A (22) korrigált determinációs együttható jelölésére itt most használjunk $\bar{R}_{12}^2$-t, hogy megkülönböztessük az alábbiakban kiszámolásra kerülő további korrigált determinációs együtthatóktól. Ha csak az $x_1$ (munkaóra) változót hagyjuk meg ($n = 22, m = 1$), akkor a korrigált determinációs együttható (jelölésére megkülönböztetésül bevezetjük az $\bar{R}_1^2$-t):

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-m-1} \cdot \left(1 - r_{y1}^2\right) = 1 - \frac{22-1}{22-1-1} \cdot (1 - 0{,}9181) = 0{,}9140 = \bar{R}_1^2. \tag{23}$$

Hasonló gondolatmenettel, ha csak az $x_2$ (öntözővíz) változót hagyjuk meg ($n = 22, m = 1$), akkor az adjusztált $R^2$ (itt az $\bar{R}_2^2$ megkülönböztető jelölést vezetjük be):

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-m-1} \cdot \left(1 - r_{y2}^2\right) = 1 - \frac{22-1}{22-1-1} \cdot (1 - 0{,}2127) = 0{,}1733 = \bar{R}_2^2. \tag{24}$$

A modellben használt változók számáról, illetve arról, hogy melyiket hagyjuk meg, úgy is dönthetünk, hogy a fentiek közül azt az esetet választjuk, amelyikre $\bar{R}^2$ értéke maximális. (Megj.: A képletekből látszik, hogy ha ugyanannyi a változók száma, akkor az az adjusztált $R^2$ lesz nagyobb, amelyikben nagyobb páronkénti determinációs együtthatóval számolunk, a kisebbhez tartozót emiatt felesleges kiszámolni.) A (22), (23) és (24) eredmények növekvő sorrendben:

$$\bar{R}_2^2 < \bar{R}_1^2 < \bar{R}_{12}^2\,, \tag{25}$$

tehát érdemes a kétváltozós modellt megtartani. Az viszont megfontolandó, hogy mivel az $\bar{R}_1^2$ és $\bar{R}_{12}^2$ között alig van különbség, és ha a kétváltozós függvény helyett az $x_1$ egy magyarázó változós regressziós modellt használjuk, akkor ez összhangban lesz a IV. kérdésre adott válasszal, amely szerint csak az $x_1$ magyarázó változó szignifikáns. Ilyen esetben a szakmai szempontok (konzultáció az adatokat szolgáltató szakemberekkel) is fontos lehet a végső modell kialakításában. Sokszor előfordul, hogy egy statisztikai értelemben kevésbé megbízható függvény jobban modellezi a vizsgált folyamatot, mint a másik, „jobb" statisztikai mutatószámokkal rendelkező. Egy ismételt mintavétel (másik adatsor) vizsgálta is célravezető lehet, de erre a gyakorlatban legtöbbször nincs lehetőség.

## Összefoglalás

Az alkalmazott statisztika oktatása kiemelt fontosságúvá vált napjainkban. A kevés óraszám és a hallgatók megfelelő előképzettségének hiánya miatt nagyon fontos az egyszerű megközelítés és a szemléletes példák használata. A fenti két mintafeladat a többváltozós lineáris regressziószámítás néhány olyan apró részletére világít rá, amelyekkel konkrét problémák megoldása során találkozhatnak hallgatóink. A témakör tárgyalásakor természetesen még számtalan egyéb kérdés felmerülhet, amelyekre itt nem adtunk választ. Nem foglalkoztunk például a többváltozós lineáris regresszió alkalmazhatósági feltételeinek vizsgálatával, amelytől a gyakorlatban nem tekinthetünk el. Nagyon fontos ismételten hangsúlyozni, hogy gyakorlati/szakmai szempontból nem mindig azok a legjobb modellek, amelyeket a megfelelő statisztikai mutatók kiszámításával a legmegfelelőbbnek gondolunk. Előfordulhat, hogy a statisztikai értelemben gyengébbnek értékelt modell az adott szakterületen sokkal jobban leírja a vizsgált folyamatot, mint amelyiket a statisztikai mutatók alapján választanánk. A statisztikai modellalkotás éppen ettől szép és izgalmas feladat.

## Irodalomjegyzék

[1] **Bolla M., Krámli A., Nagy-György J.:** Többváltozós statisztikai módszerek. Szegedi Tudományegyetem 2013. http://eta.bibl.u-szeged.hu/1327/1/tobbvaltozos_statisztikai_modszerek.pdf

[2] **Domán Cs.:** Többváltozós Korreláció- és regressziószámítás. Miskolci Egyetem Gazdaságtudományi Kar, Oktatási segédlet 2005. https://docplayer.hu/10101458-Tobbvaltozos-korrelacio-es.html

[3] **Kis-Tóth L.,** Lengyelné Molnár T., Tóthné Parázsó L.: Statisztikai programrendszerek. Eszterházy Károly Főiskola, Eger 2013. https://mek.oszk.hu/14100/14139/pdf/14139.pdf

[4] **Korpás A.:** Általános statisztika. Nemzeti tankönyvkiadó, 1996.

[5] **Mundruczó Gy.:** Alkalmazott regressziószámítás. Akadémiai Kiadó, Budapest 1981.

doi:10.20312/dim.2023.05

# Lakat van a számON(?)
## avagy a logikai játékok alkalmazása a technikumi oktatásban

**Horváth Anita Ágnes**
Soproni SzC Handler Nándor Technikum
hanita76@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Az emberiség történetében a logikai és táblajátékok mindig is jelen voltak – nem véletlenül. Nem csupán kellemes időtöltést kínáltak, de a fejlesztő hatásuk számos területen megkérdőjelezhetetlen.
Gyakorlati példákon keresztül kerül bemutatásra, mely területeken és hogyan válnak az ördöglakatok izgalmas részeivé a tanítási-tanulási folyamatnak, hogyan alkalmazzuk ezen játékos eszközöket a szakmai informatika technikumi oktatásában, mely készségeket fejlesztik és milyen eredmény várható a rendszeres használatuktól.
Gondolkodjunk játékosan és fedezzük fel együtt a logika és kreativitás erejét az oktatásban!

ABSTRACT. Logic and board games have always been a part of human history, and for good reason. Not only have they provided a pleasant pastime, but their developmental impact in many areas is unquestionable.
Through practical examples, we will show in which areas and how metal wire puzzles become an exciting part of the teaching-learning process, how to use these playful tools in IT specific secondary technical education, which skills they develop and what results can be expected from their regular use.
Let us think playfully and explore together the power of logic and creativity in education.

## 1. Bevezetés

A Bár a játszva tanítás módszere rendszerszeren nem bevett gyakorlat az oktatásban, főként nem a szakmai képzésben, de a logikai és fejtörő játékok alkalmazása, több évtizedes tapasztalatom szerint igenis hatással van a tanulás légkörére, szerepet játszik az érdeklődés felkeltésében és a motiváció fenntartásában. Fejleszti a kognitív készségeket, és egyéb személyiségjegyekre is hatást gyakorolnak. A szakmai informatika képzés során előnyt jelent, ha feszegetjük a határokat, ha a tanulóknak ki kell lépni a megszokott keretek közül, játékos formában kezdetben egyszerű, majd egyre összetettebb feladatokkal kell megbirkózniuk, és idővel eljutnak készségszinten a problémamegoldás magasabb fokára.

Ráhangolódást követően bemutatom, hogy a technikumi képzés során milyen területeken lehet hatékonyan és eredményesen alkalmazni a logikai játékokat, ördöglakatokat és a fejtörő feladványokat, illetve azok milyen időkeretben jelennek meg a tanórákon és azon kívül, mely kompetenciák érintettek és milyen készségeket fejleszthetünk, továbbá milyen eredményeket várunk tőlük.

## 2. Meddig nyúlik vissza a játszva tanulás módszere?

Logikai és táblajátékok az őskor óra kísérik az embereket, nemcsak azért, mert kellemes időtöltés, hanem gondolkodás- és logikafejlesztő funkciója is van. Számtalan képességet és készséget fejleszt.

Nézzünk néhány kiragadott példát a történelemből:

- Az első játékként értelmezhető eszközük valójában a munkaeszközök kicsinyített másai voltak, a begyakorlást tették lehetővé kockázatmentes környezetben, arról nem is beszélve, hogy fizikai és szellemi erőfeszítésre kényszerítették a használóját kortól függetlenül. Minderről már a barlangrajzok is árulkodtak.
- A történelem során számtalan helyen találunk bizonyítékokat, fennmaradt kellékek formájában vagy épp rögzítették vizuálisan az elmét megmozgató játékok jelenlétét. Itt is fontos, hogy nemcsak a gyermekek fejlesztésében való alkalmazást mutatják be. Például egyiptomi dobóhenger; Nofertari sírjából származó részlet Kr. e 13. sz; görög vázakép, melyen Ajax és Achiles kockázik; Pachisi – Ne nevess korán! hindu eredetű játék, melyet ma Ki nevet a végén néven? ismerünk.
- Már a görögök (Platon, Arisztotelész) is belátták, hogy a játék beiktatása hatékonyabbá teszi a tanítási-tanulási folyamatot.
- A római Seneca az örömforrást, a katartikus élmény megjelenését ismerte fel bennük és tudatosan játékos módszerekkel tanított. A gyermek sokkal kitartóbb és fáradhatatlanabb lesz általuk.
- Nagy Károly udvarában (~800) Alkuin: *Feladatok az értelem élesítésére* címmel konkrétan lejegyezte, dokumentálta feladványait. Többek között innen ered a klasszikusként ismert Révész által kecske–káposzta–farkas folyón való átszállításának példája.

A játékok fő célja mára a gyerekek értelmi képességeinek a fejlesztése, de mindenki számára ismert a homo ludens kifejezés, vagyis a játékos ember fogalma, aki kortól függetlenül szeret játszani (Sokszor halljuk, hogy addig jó, amíg ez a játékos gyerek nem veszik ki belőlünk), megméretni vagy akár legyőzni önmagát, illetve ezen túlmenően szereti összemérni a képességeit másokkal. [1]

## 3. Miért alkalmazzuk a játékot, mint eszközt?

Miért van a játékoknak máig jelentősége? Az ember alapvetően keresi az örömforrást, az élményeket jelentő elfoglaltságot, azokból tud rövid- és hosszútávon töltekezni. Mindenki másban találhatja meg ezt az tevékenységet, de talán a játék egy közös pont lehet.

Ha konkrétan nem is fogalmazódik meg bennünk, nem is kerül kimondásra, de a játék valamiféle célt ad, amit próbálunk teljesíteni, a siker, az eredmény elérése érdekében pedig tenni kell. Sőt, többet tenni, akár úgy is, hogy kilép az ember a komfortzónájából – fizikailag és/vagy szellemileg – és feszegeti a saját határait. Mindezen felül az eredménytől függően vagy függetlenül motivációt ad. Ha csak egy egyszerű példát nézünk, számítógépes játékoknál miért fut neki a sokadik sikertelen kísérlet után még egyszer és még egyszer a játékos egy adott pálya vagy szint teljesítésének? Mert keresi az izgalmat, ott van benne a „csakazértis megcsinálom” ereje, vagy épp felszabadultságot, lelki egyensúlyt ér el vele, boldogsághormon termelődik, amely újra és újra a cselekvésre ösztönzi, vagyis elindul egyfajta körforgás.

Ha a kérdést iskolai keretek közé emeljük, akkor nem kerülhetjük meg a játék és a tanulás összehasonlítását. Milyen fő jellemzői vannak egy tisztán tanulási környezetnek, és milyen előnyökkel jár, ha a játszva tanulást alkalmazunk.

Amíg a tanulás egy kötelező, külső kényszerből eredő tevékenység, addig a játék önkéntes és belső indíttatásból származik. (Megjegyzem, néha a játék elkezdése sem egyszerű, ilyenkor

a tanár részéről a „szolid erőszak” alkalmazása megoldást jelenthet, és ahogy szokták mondani, majd evés közben jön meg az étvágy.) Számtalanszor találkoztam már azzal, hogy „én nem szeretnék beállni”, „nem akarom kipróbálni”, a végén pedig eltántorítani sem lehet az illetőt a játék mellől.

Bár a játék sem ad mindig feltétlenül sikerélményt, mégis valamiféle felüdülést jelent, ellazulást biztosít, sőt, örömet szerez.

Ma a tanuláshoz használatos eszközök színesek, digitálisak és vonzóbbak, mint korábbi társaik, és kétségtelen, hogy az utóbbi időben óriási fejlődésen mentek keresztül, de akkor sem tudnak elszakadni a tanulás alapvető kényszerétől, attól, hogy a használójának muszáj az adott ismeretet elsajátítania. Játék közben viszont burkolt formában jut a játékos ismerethez, vagy szerez jártasságot valamilyen területen a tanuló, úgy hogy észre sem veszi, nem tudatosul benne, mégis egy adott ponton már mint készség realizálódik és tudattalanul alkalmazza a szerzett kompetenciákat.

De talán a legfontosabb, hogy a játékban szabad hibázni. Sőt, pont ez a lényege, mert a hibákból lehet tanulni, abból lehet következtetést levonni, és javítani a problémás pontokat. E tekintetben összecseng az iskolai tanulási folyamattal, hisz a hiányosságok, hibák felismerése és javítása ott is adott, és lássuk be, hogy az iskolának, az oktatának pontosan ez a feladata, de az elavult módszerek, a szoros időkorlátok, sokszor nem teszik lehetővé az egyéni igényekhez való alkalmazkodást.

## 4. Mely területeken használhatók a logikai játékok?

A középiskolában, a technikumi oktatásban, azon belül pedig az informatika szakterületén számtalan helyen van létjogosultsága a logikai feladatok és játékok, illetve a páros és társasjátékok alkalmazásának. Az általános logikafejlesztés mellett – amely főként a programozáshoz elengedhetetlen algoritmikus gondolkodást segíti –, pályaorientáció, pályaválasztás, versenyek, szakkörök, tehetséggondozás területén is hatékony részelemei a tevékenységünknek.

Az első alkalom, amikor kapcsolatba kerülünk a leendő tanulókkal, a pályaorientációs és pályaválasztási rendezvények. Azért kiemelten fontos főként az informatika képzés tekintetében, mert legtöbbször sem a tanuló, sem a szülő nem tudja pontosan, hogy valójában mit takar az informatikus szakma. Amíg egy klasszikus szakma mint az asztalos vagy a fodrász eszközei, munkája, és annak eredménye mindenki számára kézzel fogható, megtapasztalható, addig az informatika kissé megfoghatatlan és legtöbb esetben téves elképzelések élnek róla. Az általános iskola tananyagtartalma nem mutat valódi képet és nem differenciálja az informatika (ma már digitális kultúra) vagyis a számítógép mindennapi használata mint általános alapkészség, és az informatika mint szakma, vagyis hardverismeret, programozás és hálózatok tervezése, konfigurálása területeit. Legtöbben azt gondolják, ha a gyerek a telefonját nyomkodja egész nap, és még telepíteni is tud applikációkat, akkor az valódi érdeklődés a szakma iránt.

*Pályaorientáció* esetén 5–7. osztályos diákokról beszélünk, formáját tekintve szakkör és Szaki program keretében, ami a tavaszi időszakot öleli fel.

A *szakkör* hagyományos formában, hétvégén, nyilvánosan meghirdetett, tematikára épülő, alkalmanként 2-3 órás foglalkozások sorozata. Itt a képzés során megjelenő szakmai tantárgyak egy-egy jellemző szeletét tudjuk bemutatni az érdeklődőknek az átlagos tananyagnál magasabb szinten, hisz csak így kap képet a kisdiák a szakma valódi mivoltáról. Többek között a programozás különböző formái kapnak teret és ha logikai feladatok által vezetjük be, illetve annak programként való megvalósítását tűzzük ki célul, nemcsak a motivációt tudjuk fenntartani, de bizonyos szakmai tartalmak is átadásra kerülnek. (pl.: Sárkány vs. Lovag játék)

A *Szaki* programsorozat kezdetekor a hiányszakmákat céloztuk meg – az informatikát is –, szintén tematikus, de 1-2 alkalomra szóló 90 perces, kiscsoportos programokkal, ahova szervezetten és az általános iskolákkal egyeztetve egy-egy napra érkeztek a 7. évfolyamos kisdiákok, hogy testközelből ismerjék meg a tanulás valódi színtereit, szaktantermeit, eszközeit, tanárait és természetesen tartalmait. Tematika szerint felépített foglalkozás keretében haladtunk végig egy feladat megoldásának az útján. Ebben a rendszerben a logikai feladatok a ráhangolódást, esetenként a differenciálást segítették.

Ha már a *pályaválasztás* a tét, akkor a tanév őszi időszakáról és inkább a 7-8. évfolyamról beszélünk.

*Kiállítások* és *kitelepülések* során a szakma jellemzőinek a bemutatása mellett igyekszünk felmérni a tanulók motiváltságát, kitartását, problémamegoldó képességét. Bár az idő rövidsége miatt (10-25 perc) komplex feladatmegoldásra nincs lehetőség, így a szakmai kompetenciákhoz kapcsolódó fent említett területeket figyeljük, melyre ismét a logikai fejtörők adnak lehetőséget. Hogy néhány példát említsek, parkettázási feladatok kapcsán nemcsak a logika és problémamegoldás (programozás), de a kézügyesség (hardver és hálózati elemek szerelése) is láthatóvá válik számunkra. Talán az idő rövidségét kompenzálja, hogy eleve csak azok keresnek fel minket, akik célirányosan a szakma iránt érdeklődnek.

Talán kevésbé hatékony a *pályaválasztási nap*. Az általános iskoláknak munkarend szerint kötelező megszervezniük, melynek egyik megvalósulási formája, hogy teljes osztályokkal, esetleg évfolyammal, előzetes regisztráció nélkül látogatják meg az intézményt. Sokszor az évfolyamok sem a megfelelőek, a diákok nem céltudatosak, a nagy létszám miatt kezelésük, irányításuk sem egyszerű. Ebben az esetben is tökéletes megoldás a logikai feladat, azok gyűjteménye, vagy online megvalósítása, főleg, ha a kisdiákok számára érdekes köntösbe csomagoljuk. Legyen az kalóz, csőszerelő, vagy valamelyik aktuális kedvenc, ha már az érdeklődésüket felkeltettül, még akár gondolkodni is hajlandók a feladatok megoldásain. Ha mindezzel az érdelkődés felkeltésén kívül annyit nyerünk, hogy visszatérve a megszokott környezetbe a matematika oktatásához adtunk egy kis logikai képesség fejlesztési támogatást, már megérte dolgozni a feladványokon.

Az aktuális szakmai *programtantervek* (PTT) lehetőséget adnak az ágazati alapvizsgát megelőzően a Programozási alapok és az IKT projektmunka tantárgy keretein belül játékos tartalmakon keresztül az érdeklődés elmélyítésére a szakmai tartalmak iránt. Ennek természetesen részét képezik a logikai játékok, kapcsolódó keretrendszerek fizikai és online formában egyaránt.

Az eltérő képességek és hozott tudás – vagy inkább az abból adódó hiányosságok – frusztrációt okozhatnak csoporton, osztályon belül. Ennek feloldására kiváló lehetőség, hogy a tanulók képességeit játékos formában mérjük fel, ők is megismerhetik erősségeit és fejlesztendő területeit, némi önismeretre és önreflexióra is alkalmat ad, nemcsak a kezdő évfolyam elején, hanem folyamatosan. Innen már csak egy lépés a logikai játékok *felzárkóztatás* és a *tehetséggondozás* területein való bevetése.

Ha *rendszeresen* alkalmazzuk, megfelelő időben akár szórakozásként is használható, és jutalomként is tekinthetünk rájuk.

Természetesen a tanórák *tartalmi elemeinek átadása* mindenekelőtt a felhasználási terület, melyre később részletesen kitérek.

## 5. Mit ad a tanórákhoz a játszva tanulás?

Mivel a játékok alkalmazása nem bevett gyakorlat az oktatásban, legalábbis szakmai program szinten, így az újdonság erejével hat a tanulókra, és a tanuláshoz való hozzáállást finomítja, segíti a tanórákon való aktív részvételt. Olyan oldott légkört biztosít, amely lehetővé teszi, hogy például felállhat a diák a helyéről, beszélgethet, vagy épp az agyi aktivitás, a

figyelem más területre koncentrálódhat. A differenciálás egy sajátos formájaként is bevethetők a fejtörők, ördöglakatok. Például, ha van egy hiperaktív és/vagy egy jó képességekkel rendelkező tanuló, aki hamar végez a feladatmegoldással, az ő szabad kapacitásai a játékok általuk kiválóan leköthetők.

Annak érdekében, hogy valóban elérje a játszva tanítás a célját, bizonyos dolgokat feltétlenül figyelembe kell vennünk, de természetesen a lista a csoport jellegétől függően bővíthető.

- Fontos, hogy a korosztálynak megfelelő szintű feladatokat válasszunk, mert ha túl könnyű, hamar unalmassá válhat, és máris fegyelmezési problémákkal szembesülünk. A másik véglet, hogy túl nehéz feladatot választunk, az pedig a sikerélményt gátolja. Bizonyos feladványoknál azt is szem előtt kell tartani, hogy a megoldást úgymond magukban tudják-e tartani a tanulók, aki már rájött a titok nyitjára, képes-e meghagyni társainak is a heurékaélményt. Ilyen jellegű feladatoknál a magasabb évfolyamok lehetnek a kívánatos célcsoport.
- Nem mindegy, hogy mikor és milyen időtartamban vetjük be a feladatokat. Óra elején figyelemfelkeltésként, motivációként, vagy óra közepén „pihenésként”.
- Rendszeres legyen, különben elveszíti az értelmét. Ahogy a fizikai edzettség is akkor tartható fenn, ha rendszeresen végzünk gyakorlatokat. Az agy tornáztatásának is a rendszeresség az alapja.
- Ne legyen klasszikus értelemben vett értékelés! Elveszti a létjogosultságát a szabad hibázni elv, ha elveszti a felhőtlenségét, a felszabadultság érzést. Azt lássa a diák, hogyha például egy Sudokut, vagy Nonogramot gyakorol, akkor egyre gyorsabban és egyre kisebb energiabefektetéssel éri el a játék célját. Ha versenyeztetünk, akkor is inkább csak a pozitív teljesítményt emeljük ki.
- Ha már verseny, akkor a tanár vezesse azt a fair play szem előtt tartásával.

## 6. Matematika- és informatikaoktatásban való alkalmazás

Elsőként tegyünk fel három kérdést, melynek válaszai megadják, hogy a matematika- és az informatikaoktatásban miként juthatunk el egy magasabb gondolkodási szintre, melyben meggyőződésem, hogy a logikai feladványok és játékok aktív szerepet játszanak.

**Mire alapozunk?**

- szövegértési képesség
- általános iskolai matematika és informatika ismeretek

**Mit szeretnénk fejleszteni?**

- analizálás
- rendszerezés
- premisszák felismerése
- hipotézis felállítás
- modellalkotás
- összefüggések vizsgálata és bizonyítás
- konklúzió, helyes következtetés levonása
- a kombinatív képességek
- algoritmikus gondolkodás
- az absztrakciós és szintetizálóképességek fejlődése
- diszkusszió, az eredmények beillesztése a meglevő ismeretanyagba, a megfelelő helyre [6]

**Hova szeretnénk eljutni?**

- problémamegoldás képesség, vagyis az öröklött, rendelkezésre álló fizikai és szellemi adottságok készség szintre emelése, tehát a gyakorlat olyan szintű megszerzése, hogy általa a tudatosság már kikapcsolásra kerüljön, vagyis automatizmussá váljon.
- kreativitás fejlődése – a készségszinten beépített és elsajátított ismeretanyagot, tapasztalatokat adott helyzetekben, új nézőpont szerint kapcsolja össze a tanuló.

Az út során, melyen eljutunk a célig, fontos, hogy a tanulóknak sikerélménye legyen. Ezt úgy érhetjük el, hogy folyamatosan dolgoztatjuk őket a feladványokkal, amely egyfajta tartós teljesítményt hoz magával, önbizalmat és remélhetőleg hosszabb távra motivációt ad. Szerencsés esetben mindezáltal a tanulóban korrekt önértékelés és önbecsülés alakul ki, ami akaratlanul is kihat a tanulmányokra és az ott elért eredményekre.

A folyamatosság egyfajta szokáskialakítást indukál és ha jól megválasztott a feladatok sorrendje, vagyis fokozatosan erősödik és apránként feszegeti a határokat, akkor az akadályok leküzdése is ösztönszerű attitűdként épül be a tanulók személyiségébe.

Összességében a játszva tanulás beillesztése a mindennapokba képessé teszi a gyereket a megszerzett ismeretek szokatlan helyzetben való gyors felidézésére és alkalmazására.

Nézzünk néhány példát arra, hogy egy-egy játék hány területen segíthet a tananyagtartalom megértésében.

***Tamba*** (3D amőba)

- térben való tájékozódás, térlátás
- irányok
- tervezés, preventív gondolkodás
- taktika és stratégia alkalmazása

***Kártya*** (Snapszer) és a ***Darts***

- alap számolási készség fejlesztése
- memóriafejlesztés
- megfigyelőkészség
- kombinációs készség
- szabálykövetés

***Pentominó***

- Testek hálója
- Kombinatorika (például az öt négyzet hányféle módon kapcsolódhat egymáshoz az oldalai mentén)
- Parkettázási feladatok (adott terület lefedése különböző pentomino elemekkel).
- Konvex és konkáv síkidomok
- Oszthatóság (a hatvan osztói, téglalap, négyzet területek segítségével)
- Szimmetria, tükrözés
- Backtrack – Visszalépéses keresés algoritmusa [6]

Kimondottan szakmai informatika órán és a tananyaghoz kapcsolódóan szinte minden területhez megtaláljuk az azt támogató logikai játékot. Ha nem, akkor van szükség a tanár találékonysága, kreativitása. Íme néhány példa mindkettőre.

- Számrendszerek (kimondottan a bináris számrendszerre, saját ötletek)
  - egy csapat indításának beosztása kenuversenyen, ahol 1, 2 és 4 fős kenuk állnak rendelkezése
  - kettő 4 fős (következő nehézségi szint a 8 fős) csapat egymással szemben, de egymásnak háttal való felállítását követően a tanár mond egy számot az adott számkörből, és a tanulóknak, aszerint, hogy az általa képviselt helyiértéken 0 vagy 1 az érték, le kell guggolni, vagy épp állva kell maradni. A feladat egyéni és csapatszinten is komoly fejlesztő hatással bír.
    A hálózatok szegmentálása során a 256-os számkör magabiztos és segédeszköz (számológép) nélküli használata során elengedhetetlen a fenti tartalom alkalmazásszintű ismerete.

- Logikai kapuk/kapcsolatok
  - Circuit Scramble applikáció, a fordított tanterem (lásd később) módszerével saját tapasztalat útján értik meg a szabályokat, melyet tanórán a szelekció összetett feltételeinél így már „csak” alkalmazni kell.
- Algoritmusok
  - Általánosságban az algoritmusok megértéséhez első lépésként kiváló a Bűvös-kocka kirakásának elsajátítása. Mind a felismerés, hiszen adott kockaállástól függ, hogy melyik lépéssorozatot kell alkalmazni, hol tartunk a folyamatban (hányadik sor, él vagy épp sarokcsere következik), mind a helyes lépéssor kiválasztása, mely a döntési képességeket, a lépéssorok megjegyzése pedig a memóriát fejleszti, sőt a finommotorika is tökéletesedhet általa.
- Logaritmikus keresés
  - Egyértelműen a számkitaláló játék a bevezető feladat. A játék során megfigyelhető a tanulók faladathoz való hozzáállásában az optimalizálásra való igénye és adott számkörben még az alapműveletek használatát is erősíti.
- A feladat eljátszása
  - rendezési algoritmusok esetén sokkal szemléletesebb, ha saját maguk az alanyai, résztvevői a megoldás folyamatának
- Visszalépéses keresés (backtracking)
  - Klasszikus feladatok: Nyolc királynő, Huszár útja
  - SOMA, Pentomino, MindenNAPtár (Daily Calendar Puzzle) (1. kép) – ezek talán játékosabbak és a tanulóknak szórakoztatóbbak, mint klasszikus társaik
- Rekurzió
  - Hanio-tornyai

**1. kép – A mindenNAPtár logikai játék Daily Calendar Puzzle** (forrás: saját fotó)

Ami kimondottan hatékony a fizikai játékot követően, ha magát a játékot kell program formájában megjeleníteni. Dupla haszon, hisz fenntartja a motivációt, mert amint kész a program, lehet vele játszani (sőt, a nem informatikus barátoknál lehet vele „menőzni”), és még a programozási ismeretek is bővültek, vagy épp begyakorlásra kerültek.

- Szelekció
  - Egyszerű számkitaláló
  - Dobókocka
  - Fej vagy írás
  - Kő–papír–olló (+gyík–Spock)
- Iteráció
  - Számkitaláló
  - Számrendszerek közti átváltás
  - Sárkány vs. Lovag
- Optimális útválasztás
  - Labirinth
  - CodyColor

A matematika és informatika tantárgyakat, a megoldott feladatok is összekötik, hiszen programozás tanításához a legalkalmasabb példákat a tantárgy bevezető részében szinte kivétel nélkül a matematikából vesszük (pl.: másodfokú egyenlet megoldása képlet alkalmazásával). Tehát építünk is azokra, és általuk megerősítésre is kerülnek az ismertek.

## 7. Milyen kompetenciák fejlődnek még a játékok által?

Az adott tantárgyi ismeretek fejlesztésén, kognitív képességeken túl több más terület is bekapcsolódik a fejlesztésbe, úgymint a helyes viselkedésformák kialakítása, személyes és társaskompetenciák, de még a manapság előtérbe kerülő soft-skillek-re, vagyis a munkakörnyezetbe való beilleszkedéshez szükséges kompetenciák fejlesztésére is pozitív hatással lehet ez a munkaforma. [2]

**Személyes kompetenciák**

- fegyelem
- önállóság
- igazságtudat, magáért való kiállás
- udvariasság
  - elutasítás, a nemleges válasz értékelése és feldolgozása
  - kifogásolni vagy épp elfogadni a bíró döntését
- veszteségtűrő képesség, kudarckezelés
- önfegyelem
- kockázatvállalás

**Társas kompetenciák**

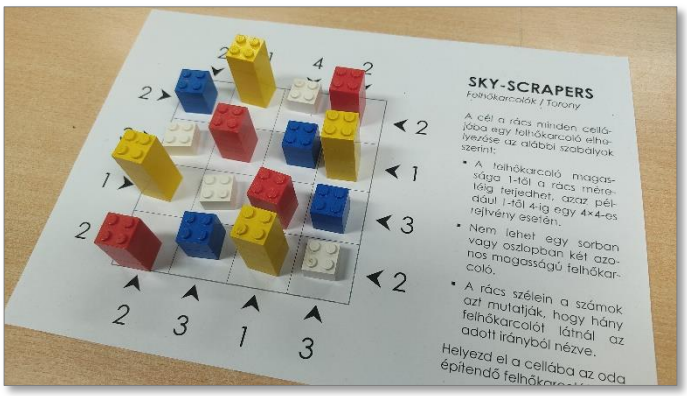
- kapcsolatteremtés
- kommunikáció
- szabálykövetés és fair play
- együttműködés, csapatmunka
- konfliktuskezelés
- empátia
- társas kapcsolatok

## 8. Milyen eszközök kerülnek felhasználásra?

Az eszközök terén roppant szerteágazó a kép, számtalan szempont szerint tudjuk őket csoportosítani.

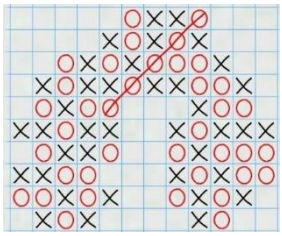
**Miből készül?** Vannak a *fejben játszható* játékok, melyhez semmi nem szükséges, aztán az összetettebb, vagy jegyzetelést, rajzolást igénylők, ahol papír és íróeszköz, tábla vagy épp számítógép, esetleg egy applikáció szükséges. *Papíralapút*, amely papíron kerül kiadásra azért célszerű alkalmazni, mert informatika szakmát tanulók esetén szempont, hogy időnként felálljanak a számítógéptől. Ilyen játék A város matematikája / Easter Egg Hunt, mely során fizikailag kell bejárni a város adott részét, egy-egy jellegzetes vagy épp eldugott elemet megkeresni és a feladat megoldásához felhasználni. A legtöbb játék *fából, fémből vagy műanyagból* készül.

**Hogy készül?** A játékok üzletben való beszerzése a kézenfekvő és bizonyos esetben megkerülhetetlen (pl.: Bűvös-kocka), de mivel ezek jelentős anyagi terhet jelentenek, így sokszor saját magam készítem el az előbb felsorolt alapanyagokból, de főként fából, papírból, drótból, textilekből vagy ép legóból, építőkockákból a játékokat (pl.: Pentomino, Tangram, mindenNAPtár). Mivel csoportokkal dolgozom, nem feltétlenül van kapacitásom a megfelelő darabszám biztosítására, így szükség esetén, ha megvalósítható, akkor applikáció formájában is készülnek feladatok, vagy használunk kész online programokat (pl.: Sudoku, Nonogram). Bizonyos esetekben (2. kép) a fizikai eszköz könnyebb megértést biztosít, így azt egy-egy példányban elkészítem, és a megértést követően már könnyebb az alkalmazások használata (Sky-scrapers).




**2. kép –Sky-scrapers játék** (forrás: Saját fotó)

**Résztvevők száma szerint.** A játékosok száma egyéni, páros és társas/csapatjáték lehet. Egyénire példa a 4 color (térképszínező) vagy a Xmas Tree Ligth Up (és még ünnepi hangulatot is lehet teremteni általa), páros játékok az amőba és annak változatai, illetve csapatjáték például a CodyColor.



*Amőba*

*Connect4*

*QuiXO*

*Tamba*

*Orbito*

*Pentago*

*Take the Tower*

**3. kép – Az amőba játék változatai**
(Forrás: https://www.okosjatek.hu/; https://www.kreativpuzzle.hu/; https://tarsasjatekrendeles.hu/ https://store.boardgamebarrister.com/; https://www.jokari.com/)

Itt hadd emeljem ki a fokozatosságot az amőba példáján keresztül. Bizonyára mindenki ismeri gyerekkorából az alapjátékot, ahol 5 egyforma jelet kell az adott játékosnak valamely irányban összegyűjteni egy négyzetrácsos papíron. Eddig síkban dolgozunk az alap kétszemélyes játékok szabályai szerint. Egy következő lépcsőfok a függőleges, egy irányból való építkezés szerint a Connact4, ami már egyfajta megkötés és a preventív gondolkodást jobban ösztönzi. A korlátok egy másfajta értelmezése esetén kerül a sorba a QuiXO. Ha tovább

terjeszkedünk és három dimenzióban gondolkodunk, jöhet a Tamba/3D amőba, ahol már sokkal több figyelemre és térlátásra is szükség van. Emelve a tétet és az előrelátás képességét még jobban fejleszthetjük, jöhet az Orbito, ahol a teljes pálya minden eleme két körben eggyel tovább lép, illetve a Pentago, ahol nem csak lépni kell, de azt követően a játéktér egy negyedét tetszőleges irányba 90 fokkal el is kell fordítania a játékosnak. Most a forgatási tengelyt helyezzük egymás fölé, így kapjuk a Take the Tower konstrukcióját. Hasonló fokozatokkal a Tic-tac-toe is rendelkezik (3. kép).

**Időkeret szerint.** Felvezetésre, óra megszakítására néhány perces feladatok a legideálisabbak (pl.: Tortaszeletelés, teveverseny). Ha gyakoroltatni szeretnék, vagy egy adott ismeretanyagot bevezetni, akkor számtalan 10-15 perces feladvány áll rendelkezésemre (Összekötős, szétszedős játékok, parkettázási feladatok, Dual N-back memória és koncentrációfejlesztésre). Teljes tanórát igénylő feladatok már teljes mértékben célirányosak, ami lehet egy témazáró előtti ismétlés, úgymint egy szabadulószoba, vagy együttműködést tesztelő csoportos kihívás, mint a Marshmallow-challenge.

Az 1-3 órás feladatok esetén már biztosan nem egyéni munkát hajtanak végre a tanulók és ezek már sokkal több előkészítést is igényelnek, illetve az utómunka, értékelés is jelentősebb. Ilyenek például a kódfejtések, melyek a kisprojekt kategóriát képviselik. Zárásként pedig a nagyprojektek következnek, amelyek akár egy hetet, de speciális esetben akár több hónapot is magukba foglalnak. (A Covid okán ilyenre is volt példa.) A nagyprojektek természetesen számtalan egyéb tudományterületet és tantárgyat is magukba foglalnak, de informatikus tanulók lévén a fő irányvonalat mégis az információgyűjtés, az analizáláls, szintetizálás és a helyes következtetések levonása jelenti. Konkrét példa volt erre az egyik országos szinten díjazott Nyomozás Erdélyben című krimijátékunk. [4]

Itt említeném meg azt a speciális esetet, ahol a feladatra szánt időkeret úgymond áthelyezésre kerül. Hagyományos módon a tanórán találkoznak a tanulók az új ismeretekkel – jellemzően az elmélettel –, azt gyakorolják az iskolában és otthon is. De fordítsuk meg a kettőt. A tanulók az új ismeretek elsajátítását otthon önállóan teszik meg, majd a tanórán szükség szerint tisztázzuk a felmerült kérdéseket, és gyakorolunk. Ezt a módszert fordított tanteremnek (flipped classroom) hívják, és csak olyan tanulókkal célszerű nekivágni, akik már képesek az önálló tananyagfeldolgozásra. De van olyan eset, amikor ezt az előbbi feltétel hiányában is megtehetjük. Informatikában jó szemléltető példa a Hanio-tornyai játék. A tanulók otthonra megkapják a játékot, hogy próbálják ki, játszanak vele, szerezzenek benne jártasságot, fejtsék meg a „titkát”. Majd, amikor a tananyagban a rekurzió következik, nekünk már csak annyi dolgunk van, hogy nevesítjük a játék kapcsán a tananyagegységet és természetesen gyakoroljuk annak a tanult programozási nyelvben a megvalósítását. [5]

## 9. Eredmények

Az, hogy mit várunk a logikai játékok rendszeres és tematikus alkalmazásától, az egyén és csoportfüggő.

- Aprónak tűnő eredmény, de manapság mégis nagy dolog, ha tanórák közötti szünetekben a tanulók nem a telefonjukat „simogatják”.
- Ha mégis, de logikát fejlesztő applikációkat használnak, vagy a tanulást hatékonyan segítő felületet, már akkor sem lehetünk elégedetlenek.
- Ennél is nagyobb siker, ha szünetekben ők kérnek el egy-egy még meg nem oldott ördöglakatot vagy társasjátékot.
- Nagy öröm, ha az iskolában meg nem oldott feladványon otthon is tovább dolgoznak. Igen, ebben az esetben a korrektség, a becsület is mérlegre kerül, de aki meg tudja állni, hogy ne keresse meg a megfejtést az interneten, az többet nyer, mint a feladat puszta megoldása.
- Némely már említett páros vagy táblajáték digitalizálása, programozása tanórán megoldott feladat, viszont szorgalmi feladatként is nem egy példa van arra, hogy önként vállalják magukra a tanulók a megvalósítást. (pl.: Twister „elveszett” forgatótábláját kiváltó applikáció.)
- Sikernek tekinthető az is, ha egy BTMN (beilleszkedési, tanulási és magatartási nehézséggel küzdő) tanuló a felsorolt fejlesztőeszközök között talál a maga számára megfelelőt, mellyel például hiperaktivitása kordában tartható.
- Azoknak a fejlesztésre szoruló tanulóknak, akiknek sokszor az órai tananyaggal való megküzdés is komoly problémát okoz (SNI, Sajátos nevelési igényű), a játszva tanulás módszere sikerélményeket hozhat.
- Bár a tehetséges tanulók általában ezen a területen is ügyesebbek, a megoldásokat itt is gyorsabban megtalálják, bizton állíthatom, hogy gondolkodásmódjukra komoly hatást gyakorolnak ezek az eszközök. A fejtörők által készségszinten hozzászoknak, hogy mindent több szempontból meg kell vizsgálni, későbbi feladatok során sokkal több kellékből válogathatnak, mint társaik. Összességében ennek hozományaként, szakmai tanulmányi versenyeken eredményesen állnak helyt tanítványim. (Szakmai tantárgyi országos döntő, HÓD, Infősok Viadala, ÁSZÉV, NemesTihamér és Merklik versenyek)
- A játszva tanulás által a jelenkor követelményeinek megfelelő projektoktatás bevezetését megelőzve egyéni, páros és csapatszinten is és pedagógusként is több országos díjat nyertünk. Ezen megméretések alapját képező projektek azon osztályok közreműködésével valósultak meg, akiknél alkalmaztam a játszva tanulás módszerét. (Digitális Pedagógus Díj, Digitális Témahét I., II. és különdíj és többször az Év Tanári csapata a digitalizációért III. helyezés, legjobb szakképző iskolaként.)

## 10. Hol jelenhetnek meg még a logikai játékok?

Maguk a játékeszközök számtalan egyéb területen is inspirálóak lehetnek.

- Alkalmazhatjuk őket rendezvényeken (pl. diáknap), mint kiegészítő feladat.
- Más szakmákat is inspirálhatnak a játékok, legalábbis forma- és színvilágukkal. (Rubik-kocka alakú dohányzóasztal mint vizsgaremek)
- Testnevelés órákon a mozgásos tevékenységek kombinálása a logikai feladványokkal, Sorverseny és tik-tak-toe, vagy épp a darts mely a memória fejlesztését és az alapműveletek alkalmazását fejlesztését segíti.
- Bizonyos szakmai tantárgyaknál a 3D játékok kimondottan fejlesztik a térlátást, általa a rajzolvasás készségét. (pl.: asztalos, faipari technikus)
- Dekorációként – pl.: tangram – nem csak matematika versenyen jelenhet meg.

- Helyettesítéskor kedvelik a tanulók a játékos kihívásokat, játékokat, versenyeket.
- A feladatokból gyűjtemény is készíthető, melyen keresztül a webfejlesztés szakmai fogásinak gyakorlása mellett elméjüket is fejleszthetik a diákok, ezért kedvelik az ilyen jellegű projekteket.
- Ajándékként kimondottan hasznos szakmai versenyen való résztvevők számára, de rajongóknak személyes és családi ünnepeken is bevethető.
- Számomra kedves felhasználás minden évben egy általam összeállított digitális adventi kalendárium, amely minden napra egy-egy újabb fejtörőt tartalmaz lelkes diákok, kollégák és barátok számára.

## Összefoglaló

Az technikumi oktatásban alkalmazott játékos módszerek számos előnnyel bírnak, a szórakoztató jellegén túl, komoly odafigyelést és koncentrációt igényel, tanulótól és tanártól egyaránt. A játszva tanítás módszerének pozitív hatásait nyári táboraim kapcsán tapasztaltam meg először, majd ezt ültettem át iskolai keretek közé, mert úgy véltem, hogy annak pozitív hatásai a tanulók értelmi fejlődésén túl a személyiség fejlesztésében is észrevehetők. A játékok beiktatása a tanórákba lehetőséget teremtett szakmai kreativitásom kibontakoztatásában, a differenciálásban, a tanulási nehézségek leküzdésétől a tehetségek felkarolásáig, a pályaorientációtól a versenyek szervezéséig minden területen. A játékok az egyéni és társas kompetenciákon túl a soft-skillek fejlesztésével, a motiváció megteremtésével és a figyelem fenntartásával társulva stresszmentes környezet kialakításával segítik a tanítási-tanulási folyamatot. Azonban ne feledkezzünk meg arról, hogy a játékok használata csak segíti és támogatja, de nem helyettesíti a tanulás folyamtát.

## Köszönetnyilvánítás

Hálával tartozom Szalay Lászlónak és Németh Lászlónak, a szervezőbizottságának a segítségéért és bíztató hozzáállásáért, illetve Ősz Olivér közreműködéséért, hogy bemutathattam munkámat a MOKUS 2023. évi rendezvényén.

## Irodalomjegyzék

[1] **Bencsik I.** Társasjátékok az ókorban (2022. április) Forrás: Bencsik István weboldala https://bencsik.rs3.hu/amorita-hoditas-i-e-1800-koeruel-mezopotamiaban/216-tarsasjatekok-az-okorban.html?layout=blog (Utolsó látogatás: 2023. szeptember 29.)

[2] **Grätzer J.** *Fejtorna* (magánkiadás) (1932.) https://mek.oszk.hu/15300/15379/ (Utolsó látogatás: 2023. október 3.)

[3] **Horváth A., Horváthné Gyurisán Sz.** *DiGreek, ez nem mítosz* Digitális Témahét 2020 https://digreek.hanita76.hu/

[4] **Horváth A., Horváthné Gyurisán Sz.** *Nyomozás Erdélyben* Digitális Témahét 2019 https://hanita76.hu/krimi/ és Tempus Közalapítvány Digitális módszertár https://tka.hu/tudastar/dm/553/nyomozas-erdelyben-krimijatek

[5] **Jakabné Baján I.** *Fordított tanulás a szakképzésben* 2018 Tempus Közalapítvány / Erasmus+ https://tka.hu/projekt/10176/forditott-tanulas-a-szakkepzesben (Utolsó látogatás: 2023. október 10.)

[6] **K. Nagy E.** A logikai és táblajáték-foglalkozások szerepe a matematikatanításban Új pedagógiai szemle 57. évf. 6. sz. 2007. június 88–92 p. (Utolsó látogatás: 2023. szeptember 29.) https://epa.oszk.hu/00000/00035/00114/2007-06-mu-KNagy-Logikai.html

[7] **Oláhné Téglási I.** *Logikai játékok szerepe a matematikaoktatásban* Módszertani közlemények, (55) 4. pp. 1-10. (2015) http://acta.bibl.u-szeged.hu/36508/1/modszertani_055_004_001-010.pdf (Utolsó látogatás: 2023. október 5.)

doi:10.20312/dim.2023.06

# A szintfelmérő dolgozat mint mérőeszköz: célkitűzések, eredmények és következtetések

**Barta Edit**
Soproni Egyetem Informatikai és Matematikai Intézet
barta.edit@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Az idén az egyetemünkre bekerülő elsőéves hallgatókkal szintfelmérő dolgozatot írattunk matematikából. Írásomban ismertetem a dolgozat célkitűzéseit, összeállításának szempontjait. Elemzem a hallgatók eredményeit, és egy-egy kiemelt feladat kapcsán rámutatok a hiányosságokra.

ABSTRACT. This year, we had first-year students entering our university take a maths assessment test. In this paper, I explain the objectives of the essay and the criteria used to compile it. I will analyse the students' results and point out shortcomings in a particular assignment.

## 1. Bevezetés

A felsőoktatási intézetek nagy részén a képzés jellegéből adódóan különböző, matematika témájú tantárgyak oktatására is szükség van. Ezek sikeres teljesítéséhez elengedhetetlen a középiskolai matematikai ismeretek stabil tudása. A matematika érettségi jegy vagy az év végi osztályzatok sok esetben nem tükrözik azt a tudásszintet, amire az egyetemi szakokon szükség lehet. Ezért egyre több egyetem dolgoz ki saját felmérési eszközt a szükséges tudásszint mérésére. Ez többnyire egy szintfelmérő dolgozat formájában realizálódik, amit a frissen felvett hallgatókkal íratnak meg az első szemeszter legelején.

A Soproni Egyetem három karán oktatunk matematikát a szakok igényeinek megfelelő témaköröket érintve. A két mérnöki (Erdőmérnöki, Faipari Mérnöki) karon több mint tíz éve vezettük be az első szemeszter eleji szintfelmérő íratását. Ezt megelőzően hosszabb időre nyúlik vissza az a gyakorlat, hogy a matematikatudásukat tekintve teljesen heterogén hallgatókat valamilyen formában felzárkóztassuk ahhoz az elvárt tudásszinthez, amellyel már nagyobb sikerrel végezhetik el az egyetemi matematika tárgyakat. Eleinte a félév megkezdése előtti héten egy ötnapos intenzív matematika kurzust tartottunk az elsőéveseknek. Később Alapozó matematika néven egész féléves kurzust hirdettünk meg.

A 2022 őszén bevezetett új tantervvel megújult a szintfelmérő dolgozat formátuma és tartalma is. A középiskolai tananyag átismétlésével megvalósító, matematikai felzárkóztatást hivatott egész féléves kurzust pedig Bevezető matematika névvel gondoltuk újra a jelenlegi matematika tárgyak igényeinek megfelelően.

## 2. A szintfelmérő dolgozat célja

A szintfelmérő dolgozat célja, mint ahogyan a neve is mutatja, az, hogy az egyetemre bejövő hallgatók matematikai ismereteit felmérje. Erre azért van szükség, mert a felvételi rendszer átdolgozása óta a középiskolákból hozott év végi matematikai osztályzatok és az érettségi jegyek az egyetlen információ, ami árulkodhat a frissen felvett hallgatók matematikai alaptudásáról. Ezek pedig egyrészt sokszor fals képet mutatnak, másrészt nekünk, matematika oktatóknak nem bocsátják a rendelkezésünkre. A felvételi pontrendszer magában hordozza, hogy olyanok is bekerülnek a mérnöki szakokra, akik közepes vagy esetleg még gyengébb érettségi osztályzatot hoznak. Az ő felzárkóztatásukra mindenképpen szükség van. A szintfelmérő elsősorban annak eldöntésére szolgál, hogy kik azok, akik számára erősen javasolt a középiskolai ismeretek átismétlése, a hiányosságok pótlása, amit a Bevezető matematika tárgy felvételével van lehetőségük megtenni.

Minden dolgozat egy mérőeszköz, amely minden esetben mér valamit. Ezért összeállításánál alaposan át kell gondolnunk, hogy mit szeretnénk vele mérni. Az, hogy a matematika szintfelmérővel az elsőévesek középiskolai matematikai tudását szeretnénk felmérni, az túlságosan átfogó cél, ezért semmitmondó. Ennél konkrétabban kellett megfogalmaznunk. A matematikát évek óta oktató kollégákkal napi szintű a hallgatók hiányosságainak megbeszélése. A Bevezető matematika tematikájának összeállításánál nemcsak a magunk, hanem más tantárgyak oktatóinak tapasztalatait is figyelembe vettük. Készítettünk egy olyan felmérést, amely során mindenki, aki a tárgya oktatása során matematikai eszközökkel is dolgozik, leírhatta, mit szokott tapasztalni, hol észlel hiányosságokat, melyek azok a témakörök, amelyek átismétlésére, újratanítására mindenképpen szükség lesz. A felzárkóztató kurzust megelőző szintfelmérő dolgozat célja ezen, most már konkrét tudáselemek meglétének mérése lett.

Azon is el kell gondolkodnunk, hogy mikor tekintünk egy adott tudáselemet meglévőnek. Például mondhatjuk-e egy tanulóra azt, hogy tud másodfokú egyenletet megoldani, ha csak annyira képes, hogy az arra alkalmas zsebszámológépével „kiszámolja” a gyököket, de a megoldóképletet már nem tudja helyesen alkalmazni? Nézzük meg, hány elemi tudáselem szükséges ahhoz, hogy egy másodfokú egyenletet a megoldóképlettel megoldjunk! Először is, ismernünk kell a megoldóképletet, lehetőleg fejből. Tudni kell azonosítani az egyenlet együtthatóit a képletben szereplő betűkkel, be kell tudni helyettesíteni, majd a műveletsorozatot helyesen elvégezni. Ez sokkal inkább nevezhető matematikai tudáselemnek, mint a számológépbe való beírás tudása. Sajnos egyre többször tapasztaljuk, hogy a hallgatók csak és kizárólag számológéppel tudnak számolni, beleértve az egyszerűbb műveleteket is, úgymint két egyjegyű szám összeszorzása vagy összeadása. A gép által kiírt eredményt kritika nélkül elfogadják, vagy pedig nem tudják értelmezni.

A szintfelmérő esetében a számolási és gondolkodási képességek mérését tűztük ki célul, nem pedig azt, hogy a hallgató megfelelően tudja-e kezelni a számológépet.

## 3. A szintfelmérő dolgozat összeállítása

Az előbbiekben megfogalmazott célt úgy gondoltuk megvalósítani, hogy a dolgozat írása közben semmilyen segédeszközt nem volt szabad használni, se függvénytáblázatot, se zsebszámológépet. Ennek fejében csak egyszerűen számolható feladatokat volt lehetőségünk adni.

A célkitűzések megfogalmazása és az érintendő témakörök felsorolása mellett a dolgozat összeállításánál további szempontokat is figyelembe kellett vennünk. Az egyik a dolgozat megíratásának időpontja volt. Olyan időpontot kellett választani, amely megelőzi a szorgalmi

időszak kezdetét; illeszkedik az egyetemen hagyományosan megrendezett balekhét (máshol gólyatábor) programsorozatába; elegendő idő álljon rendelkezésre a javításhoz, eredmények közléséhez, és ahhoz, hogy mindezek után a hallgató időben felvehesse a felzárkóztató Bevezető matematika tárgyat. Három karon írattunk szintfelmérőt, a két mérnöki és a közgazdaságtudományi karon. Az időpontról a karok maguk döntöttek. Az egyik kar a balekhét második napján, a másik kettő az első tanítási napon íratta meg hallgatóival a dolgozatot.

Egy másik szempont az volt, hogy a dolgozat gyorsan és egyszerűen javítható legyen. Ezt nemcsak a rendelkezésre álló idő szűkös volta indokolta, hanem az is, hogy a javítást az egyik karon teljes egészében a felsőbb éves hallgatók végezték.

Az elmúlt tanév elején írattunk először megújított formában szintfelmérőt. Az három részből állt. Volt egy öt kérdésből álló rövid számolós feladat, melyek annyira egyszerűek voltak, hogy csak a végeredményt kellett beírni a feladat melletti rubrikába. Ezt követte egy tíz tesztkérdésből álló feladatsor, ahol öt válaszlehetőség közül kellett az egyetlen helyeset megjelölni. Az ötödik válaszlehetőség mindegyik feladatnál az volt, hogy „az előzőek egyike sem”. A harmadik rész öt részletes kidolgozást, levezetést is igénylő feladat volt. Ezek közül az első három számolást igényelt, a negyedik egy tétel kimondása volt (bizonyítás nélkül, de ábrával alátámasztva), az ötödik pedig egy fogalom (definíció).

A dolgozatok gyors és egyszerű javítása céljából a harmadik feladatcsoportot el kellet hagynunk, de az elsőt és a másodikat megtarthattuk.

Tavaly a tesztet a sok helyen bevett szokás szerint pontoztuk, vagyis a hibásan választott válaszért –1 pont (büntetőpont) járt. Ez a hallgatói visszajelzések alapján annyira frusztráló volt, hogy az idén a szakfelelősök kérésére nem adtunk mínusz pontot a hibás feleletválasztásra. Itt meg kell jegyeznem, hogy mióta szintfelmérőt íratunk, valamint a matematika vizsgákon is, mindig volt teszt feladatcsoport, amelyen rendszerint a helyes válasz 2 pontot, a hibás –1-et ért, ha pedig nem karikázott semmit a hallgató, akkor 0 pontot kapott. A szintfelmérőben ugyanez a pontozási mód a későbbi hasonló tesztfeladatokra is felkészített volna, és elejét vette volna annak, hogy a hallgató bármit találomra bekarikázzon a vaktában kapott pontokért.

A dolgozat tehát két részből állt. Az első rész tíz gyorsan és egyszerűen számolható feladatot tartalmazott különböző témakörökből, melyeknek csak a végeredményét kellett beírni a megfelelő mezőbe. A második rész volt a tíz kérdésből álló teszt, hasonlóan a tavalyihoz, de büntetőpont nélkül. Minden feladat 1 pontot ért így, melyet nem lehetett tovább bontani. A dolgozat megírására 45 perc állt rendelkezésre. A hallgatóknak lehetőségük volt papíron írásban számolni, de azt a javításnál nem vettük figyelembe, csak a végeredmény számított.

A feladatok összeállításánál további szempont volt az is, hogy egyfajta nehézségi sorrendben legyenek a feladatok, a könnyűek elöl, a nehezebbek később. Az első néhány feladat ezért nem is középiskolai, hanem mindössze általános iskolai ismereteket kívánt (törtek összeadása és alapvető százalékszámítási feladatok mindkét résznél). Ez szellemileg ugyanazt a célt szolgálja, mint testmozgás előtt a bemelegítés: a hallgató ezekkel a könnyű feladatokkal hangolódik rá a dolgozatírásra, és az agy felkészül az intenzívebb igénybevételre. A könnyű feladat megoldása során némiképp oldódik a feszültség, lenyugszik a lélek, és nagyobb önbizalommal áll neki a nehezebb feladatok megoldásának.

A feladatlap két teljes oldalt tett ki, ezért itt azt teljes formájában terjedelmi okokból nem közölöm. Néhány feladatot fogok kiemelni, azokat, amelyekre meglepő válaszok vagy tömegével hibás válaszok érkeztek. A hibás válaszok nagy része tükrözi a válaszadó hibás gondolatmenetét. Ennek megismerésével nagyobb eséllyel tudjuk azt kijavítani, segítve ezzel a hallgatót.

## 4. A dolgozat eredményei

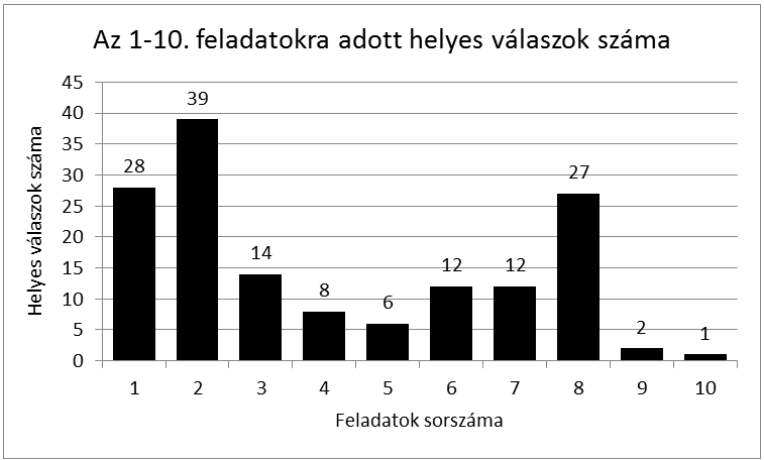
Jelen írásnak nem célja a különböző karokra felvett hallgatók eredményeinek összehasonlítása, így csak az egyik mérnöki kar hallgatóinak eredményeit elemzem. A dolgozatot negyvennégyen írták meg. Az elérhető 20 pontból átlagosan 6,05 pontot értek el, 2,92 pont szórással. A hallgatók elért pontszám szerinti eloszlását az 1. ábra szemlélteti.

**1. ábra. A dolgozatírók elért pontszámok szerinti eloszlása**

Az első rész – rövid számolásos feladatok – kérdéseire adott válaszok eredményeit az 1. táblázat tartalmazza és a 2. ábra szemlélteti.

| Feladat sorszáma | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Helyes választ adott | 28 | 39 | 14 | 8 | 6 | 12 | 12 | 27 | 2 | 1 |
| Hibás választ adott | 13 | 2 | 19 | 15 | 30 | 21 | 25 | 10 | 26 | 20 |
| Nem írt semmit | 3 | 3 | 11 | 21 | 8 | 11 | 7 | 7 | 16 | 23 |
| Helyes választ adók aránya | 64% | 89% | 32% | 18% | 14% | 27% | 27% | 61% | 4,5% | 2,3% |

**1. táblázat. A rövid számolásos feladatok eredményeinek összesítése**

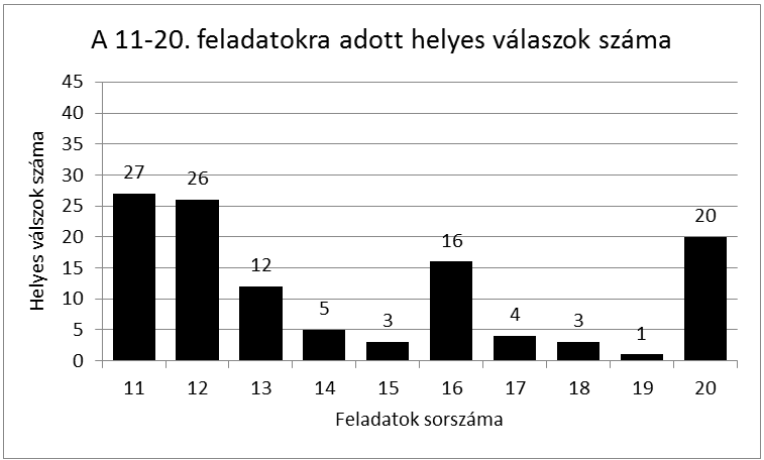



**2. ábra. A rövid számolásos feladatokra adott helyes válaszok száma**

A második rész – tesztfeladatok – kérdéseire adott válaszokat a 2. táblázat tartalmazza és a 3. ábra szemlélteti.

| Feladat sorszáma | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. | 19. | 20. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 5 | **26** | **12** | 15 | **3** | **16** | 4 | 26 | 28 | 4 |
| B | 5 | 13 | 7 | 9 | 28 | 6 | 6 | 4 | 8 | **20** |
| C | 5 | 0 | 4 | 11 | 5 | 7 | 9 | **3** | **1** | 10 |
| D | **27** | 3 | 8 | 3 | 3 | 8 | 15 | 6 | 3 | 3 |
| E | 2 | 2 | 12 | **5** | 4 | 3 | **4** | 2 | 2 | 4 |
| Nem írt semmit | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 | 6 | 3 | 2 | 3 |
| Helyes választ adók aránya | 61% | 59% | 27% | 11% | 7% | 36% | 9% | 7% | 2% | 45% |

**2. táblázat. A tesztfeladatok eredményeinek összesítése. A bekeretezett mezők jelzik az adott feladat helyes válaszát, benne a vastagon szedett szám a helyes választ adók számát jelzi. Szürke mezővel emeltem ki a legtöbb megjelölt választ**




**3. ábra. A tesztfeladatokra adott helyes válaszok száma**

## 5. Az eredmények elemzése

Az első ábráról látható, hogy az eredmény meglehetősen gyenge lett. Az évfolyamban a legmagasabb pontszám 13 volt. Ez a maximális 20 pontnak a 65 %-a, ami az általunk oktatott matematika tárgyak osztályzási kategóriáit tekintve a közepes jegy alsó határa. Ezt az eredményt mindössze ketten érték el. Az elégséges osztályzathoz a pontszámok 40 %-ának elérését szoktuk elvárni, ez itt 8 pontot jelentett, amit kilencen, vagyis az évfolyam alig több mint 20 %-a ért el. Az aláíráshoz a matematika tárgyaknál nálunk általánosan 20 %-ot kell elérni, ami ennél a dolgozatnál 4 pontot jelentett. Ez alatt hatan teljesítettek, ami az évfolyam 14 %-a. Ezek persze csak tájékoztató jellegű adatok, hiszen a szintfelmérő dolgozatnak semmilyen retorziója nem lehetett, nem is volt.

A rövid számolást igénylő feladatok eredményei azt mutatják, hogy a hallgatóknak a 2. feladat volt a legkönnyebb, ezt oldották meg a legtöbben. A kérdés a következő volt: „Mennyi 180-nak a 15 %-a?” Annak ellenére, hogy ez nem is középiskolai, hanem általános iskolai feladat, és valóban számolható fejben is, öten (13 %) nem adtak rá helyes választ.

Az 1. feladatot helyesen megoldók aránya 64 % volt, amely két tört összeadása volt: „Mivel egyenlő: $\frac{3}{7}+\frac{5}{4}$ ?” Szintén általános iskolai feladat. Tanulságos elgondolkodni a beírt válaszokon. Hárman írták végeredménynek a $\frac{8}{11}$-ed, ami a számlálók és a nevezők külön-külön történő összeadásával jöhetett létre. Szintén hárman írták a 47-et végeredménynek (a helyes eredmény számlálója). Valószínűleg elfelejtették a nevezőt is odaírni. De egyszerre hárman is? Egy hallgató írt tévesen $\frac{48}{28}$-ot, amit figyelmetlenségnek értékelek: tudja, hogyan kell törtet törttel összeadni, de a két kétjegyű szám összeadásánál hibát vétett. Egy hallgató $\frac{11,75}{7}$-et írt, ami matematikailag helyes ugyan, de így nem adhatunk meg törtet, ezért pontot sem kapott rá. Hogy ezt számológép nélkül hogyan számolta ki, arra nem derült fény. A maradék hibás válaszok között a következők fordultak elő egyedi esetekként: $\frac{15}{28}$ (összeszorozta a két törtet); $\frac{8}{28}$ (a számlálókat összeadta, a nevezőket összeszorozta); $\frac{37}{28}$ (valószínűleg összeadási hiba a számlálónál); $\frac{26}{14}$ (nem tudtam megfejteni, milyen gondolatmenettel jutott erre az eredményre).

A legtöbb helyes választ kapó feladatok harmadik helyezettje a 8. feladat lett, ezt 27 főnek, (61 %-nak) sikerült helyesen megoldania. Ez a következő volt: „Hány fokos szöget zár be egymással az origóból a $(8;-3)$ és a $(3;8)$ pontokba mutató két vektor?” Ilyen jellegű feladatot, vagyis olyat, hogy két origóból kiinduló vektor szögére kérdezzünk rá, kiváltképpen akkor, ha ragaszkodunk az egész koordinátájú végpontokhoz és a számológép nélküli meghatározáshoz, csak igen korlátozottan adhatunk fel. A feladat megoldása két elemi tudáselemből áll. Az egyik az, hogy ismerni kell azt, hogy mit értünk két vektor egymással bezárt szöge alatt. A másik a merőlegesség feltételének felismerése a feladat adataiból. Ez utóbbi ismeret hiánya esetén ennél a feladatnál a pontok helyes felvázolása nem biztos, hogy helyes végeredményt ad. A hibás válaszok között a 25, 45, 60 és 110 fokok szerepeltek. Mivel a vonalzó és a szögmérő ott lapulhatott a tolltartókban, és nem volt kizárva ezek használata, elképzelhető, hogy egy helytelen vagy pontatlan ábrázolás után a szögmérővel leolvasott értéket írták be a hibás választ adók.

Kiugróan gyengének mutatkozott a 9. és a 10. feladatoknak a megoldása. A 10. feladat egy algebrai tört egyszerűsítése volt: „Mennyivel egyenlő a $\frac{2(9-a^2)-(3-a)^2}{(a+1)(a-3)}$ tört egyszerűsítés után?” Ennek a feladatnak a létjogosultsága megkérdőjelezhető itt, az rövid számolást igénylő feladatok körében. Mivel a sokéves tapasztalat az, hogy a hallgatók a legtöbb hibát az algebrai átalakítások során vétik, valamilyen formában képviseltetni kellett ezt a feladattípust is. Mivel ezen tíz feladat mindegyikének végeredménye egy valós szám volt, ezt a feladatot is úgy kellett megkonstruálni, hogy ne egy egyszerűsített algebrai kifejezést kapjunk, hanem egy valós számot. Ennek –3 volt a végeredménye. Egyetlen hallgató adta ezt a választ, és egy volt, aki 3-at írt. A feladat megoldása során egy ponton a $(3-a)$-t kell egyszerűsíteni az $(a-3)$-mal, ami –1. Ezt véthette el a hallgató. A többi hibás válasz mindegyike valamilyen algebrai kifejezést tartalmazott, ami vagy egy helyes köztes állapotot jelentett, vagy helytelen volt.

A 9. feladat a következő volt: „Mennyivel egyenlő $27^{\frac{4}{3}}$ ?” Mindössze ketten adtak rá helyes választ (81), míg a hibás válaszok aránya több mint 50 % volt. Ez utóbbiak nagy része megfejthető, hogy miként keletkezett. A $\frac{85}{3}$ a $27\frac{4}{3}$-dal egyenlő, a 36 a $27\cdot\frac{4}{3}$ eredménye (heten adták ezt megoldásként!), a $\frac{108}{81}$-re pedig nincs más ötletem, minthogy a $27\cdot\frac{4}{3}$ szorzás helytelenül elvégzett végeredménye lehet, amikor is beszorozta a számlálót és a nevezőt is 27-tel. Mindössze hárman írták eredménynek a $\sqrt[3]{27^4}$ kifejezést, ami helyes ugyan, de még nem a végeredmény.

A többi öt feladatot is tanulságos lenne hasonló szempontok szerint elemezni, de terjedelmi okok miatt nem teszem. Abból a célból, hogy teljes képet kapjunk az érintett témakörökről és a feladatok nehézségi fokáról, ezeknek csak a szövegét közlöm.

3. Ha egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, a rajta fekvő szöge 45°, akkor mekkora az átfogója?

4. Mivel egyenlő: $\log_2 32$?

5. Tíz hallgató közül hányféleképpen lehet egy kétfős küldöttséget kiválasztani?

6. Mennyi az $x + 7 = 5 - 2(x + 3)$ egyenlet megoldása?

7. Egy négyzet alapú egyenes hasáb magassága kétszer akkora, mint alaplapjának oldala. Ezt a hasábot az alaplapokkal párhuzamos síkkal kettévágjuk. Hány százaléka az így kapott két test összfelszíne az eredeti hasáb felszínének?

Térjünk át a tesztfeladatok eredményeinek elemzésére. A két feladatcsoportot összehasonlítva megállapítható, hogy a dolgozatírók közül huszonegyen (nagyjából a társaság fele) több pontot szereztek a rövid számolós feladatokkal, mint a teszttel. Ezek zöme a 7-13 pontot elérők közül került ki, míg az alacsonyabb pontszámot elérők (0-3 pont) inkább a tesztfeladatokkal szerezték meg a pontjaikat. Tizenketten egyenlő pontszámot szereztek a két feladatcsoportból, míg tizenegyen a teszttel szereztek több pontot. Ketten-ketten értek el 6 illetve 5 pontot a teszttel, a többiek 50 % alatt teljesítettek. Ennek egyik oka lehetett az is, hogy itt már a feladatok egy leheletnyivel több gondolkodást igényeltek.

A 2. táblázat tartalmazza azt, hogy az egyes feladatok esetében melyik válaszlehetőséget hányan jelölték meg. A bekeretezett mező jelzi a helyes választ, benne a vastagon szedett szám azt, hogy ezt hányan jelölték meg. A szürke mező jelöli a legtöbb szavazatot kapott választ. Látható, hogy a feladatoknak mindössze felénél kapta a helyes válasz a legtöbb megjelölést, és azoknál is meglehetősen alacsony arányban. Az első két helyezett itt is az első két feladat lett, témakörét illetve két egyszerű algebrai tört összeadása és egy százalékszámítási feladat. Szövegük a következő volt:

*11. Az alábbiak közül melyikkel egyenlő az $\frac{1}{3x} + \frac{1}{8x}$ kifejezés?*

***A)*** $\frac{1}{11x}$ ***B)*** $\frac{2}{11x}$ ***C)*** $\frac{2}{24x}$ ***D)*** $\frac{11}{24x}$ ***E)*** *egyikkel sem*

*12. Egy termék árát először csökkentették 10 %-kal, majd két hónap múlva felemelték 20 %-kal. Hány százaléka most a termék ára az eredetinek?*

***A)*** *108 %-a* ***B)*** *110 %-a* ***C)*** *127 %-a* ***D)*** *csak a termék eredeti árának ismeretében állapítható meg* ***E)*** *az előzőek egyike sem*

A 11. feladat válaszlehetőségei között a helyes D) mellett olyan végeredmények szerepeltek még, amelyek tipikus számolási hibaként adódhatnak két tört összeadásakor. A 12. feladatnál a helyes A) válasz mellett a típushibaként a B) jöhetett még számításba, amire érkezett is szép számmal megjelölés (29,5 %). A légből kapott, semmilyen logikával nem kihozható C)-t viszont szerencsére senki nem jelölte.

A harmadik helyezett a 20. feladat volt:

*20. Hányféleképpen oszthatunk szét 7 gyerek között 3 különböző könyvjutalmat úgy, hogy egy gyerek több könyvet is kaphat?*

***A)*** *2187* ***B)*** *343* ***C)*** *210* ***D)*** *35* ***E)*** *az előzőek egyike sem*

Azok után, hogy az első rész kombinatorikai feladatára (5. feladat) mindössze hatan adtak helyes választ, ennél a feladatnál egész magas számban, húszan választották a helyes B) választ.

A C) kapott még viszonylag magas szavazatot, ami a 7 elem 3-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak a száma (azaz egy gyerek csak egy könyvet kaphatna).

A tesztkérdések fele esetében kirívóan nagy a különbség azok száma között, akik a helyes válaszlehetőséget választották, és azok száma között, akik a legtöbb szavazatot kapó válaszlehetőséget választották. Ezek a 14., 15., 17., 18. és 19. kérdések. Tanulságos lenne ezek okán elgondolkodni. Mit mutathat az, hogy egyes kérdések esetében tömegével jelölték meg ugyanazt hibás válaszlehetőséget? Vajon találomra karikázták-e be a „ránézésre leglogikusabb" választ, vagy hibásan rögzült tudáselemről van-e szó? Vagy a dolgozat vége felé már az egymásnak súgás lehetősége is közrejátszhatott? Az is kérdés, hogy a kevés számú helyes választ adó valódi tudás alapján választotta-e a helyeset, vagy esetleg találomra karikázott?

Nem kívánom az öt feladat mindegyikét egyenként elemezni, egyedül a 14.-et vegyük górcső alá.

14. *Bármely a valós számra igaz, hogy* $\sqrt{a^2+25} =$

**A)** $a+5$ **B)** $|a|+5$ **C)** $|a+5|$ **D)** $\pm a+5$ **E)** *az előzőek egyike sem*

Sajnos a matematika dolgozatok írása során nagy számban fordul elő az a hiba, hogy a hallgató egy gyökös kifejezés estén tagonként von gyököt a gyökjel alatti összegből. E hibás műveleti eljárás meglétének tesztelésére tettük bele ezt a feladatot a kérdéssorba. A válaszadók 35 %-a jelölte meg az A) választ. Ha valakinek eszébe jutott, hogy az $a$ esetleg negatív számot is jelölhet, akkor a B)-t vagy a C)-t jelölte meg. Mindhárom válaszlehetőség a tagonkénti gyökvonás valamely módját takarja. E három választ összesen 35-en, a válaszadók 81 %-a jelölte meg. Döbbenetesen magas arány! A helyes E) választ mindössze 5-en jelölték.

## 6. Az eredmények és a dolgozat értékelése, következtetések

A dolgozat eredményei alátámasztják azt a feltételezést, hogy a hallgatók matematika tárgyakból való gyenge teljesítésüknek egyik alapvető oka az, hogy már a középiskolai matematikai ismereteik sem kielégítőek. A gyenge alapokra ráépíteni a sokkal gyorsabb tempóban elsajátítandó, témáját tekintve sokkal nehezebb egyetemi tananyagot, csaknem lehetetlen. Emiatt nagy szükség van a hallgatók intenzív felzárkóztatására, elsősorban a középiskolai matematikai ismeretek azon részeinek szinte újra tanítására, amelyek elengedhetetlenek az egyetemi tanulmányok – és itt nem csak a matematika tárgyakra gondolok – során.

A többéves tapasztalat az, hogy a hallgatók legnagyobb hiányosságai három-négy téma köré csoportosulnak. Az egyik a logaritmus, a logaritmusos kifejezésekkel való számolás. Az utóbbi időben már olyan esetek is előfordultak, hogy még zsebszámológéppel sem (!) tudta a hallgató meghatározni, hogy mennyi az $ln1$. A másik az algebrai átalakítások. Tipikus hibák a törtek hibás összevonása, hibás egyszerűsítés, tagonkénti gyökvonás. A harmadik a törtkitevős és negatív kitevős hatványokkal való számolás, velük kapcsolatos átalakítások. Más területeken is fordulnak elő hiányosságok, de ezek a legsúlyosabbak, amelyek a matematika tárgyak kapcsán már a kezdetekben felfedezhetők.

A szintfelmérő dolgozat ezeket a hiányosságokat egyértelműen feltárta. A két logaritmusos feladatra (4. és 17.) mindössze 4-4 hallgató adott helyes választ. Az algebrai átalakításokat felmérő feladatokat (10., 11., 13., 14.) a legegyszerűbb 11. kivételével szintén nagyon alacsony számban oldották meg helyesen. Az egyetlen törtkitevős hatvánnyal kapcsolatos feladatot mindössze egyetlen dolgozatíró oldotta meg helyesen.

A dolgozat tehát ebben a formájában megfelelt a célkitűzéseknek. Egyszerű, rövid gondolkodást vagy számolást igényelt valamennyi feladat, és azokra a tudáselemekre fókuszált, amelyeket a későbbi egyetemi tanulmányok – elsősorban a matematika tárgyak – során is használni fognak. Ugyanakkor véleményem szerint a tesztfeladatok nem feltétlenül tükrözik a valóságos tudást. Nem állíthatjuk biztosan, hogy az, aki a helyes válasz betűjelét karikázta be, valóban tudta-e a helyes választ, vagy csak találomra karikázott, és véletlenül éppen a jó választ. A hibás választ jelölőkre már nagyobb biztonsággal mondhatjuk azt, hogy nem tudja a helyes választ. Azt azonban, hogy milyen gondolatmenet alapján jutott arra a válaszra, amit megjelölt, nem feltétlenül következtethetünk, hiszen mivel nem járt mínusz pont a hibás válaszra, büntetlenül karikázhatott bármit. Mi sem mutatja jobban a meggondolatlan karikázás tényét, mint az, hogy a tesztfeladatokra a 440 esetből mindösszesen 21 esetben nem érkezett válasz, azaz ennyi feladat esetén nem jelöltek meg egyetlen választ sem a dolgozatírók, ugyanakkor a rövid számolós feladatoknál 110 esetben maradt üresen a feladat melletti rubrika. Az első rész feladataira aki helyes végeredményt adott meg, arról nagyobb biztonsággal mondhatjuk, hogy birtokában van annak az ismeretnek, amelynek meglétét hivatott eldönteni a feladat.

Levonhatjuk azt a következtetést, hogy a tesztfeladatok kevésbé mutatják reálisan a meglévő tudásszintet, mint a számolós feladatok. Szükségmegoldásként mégis többször alkalmazunk – többnyire büntetőpontos – teszteket. Létjogosultságukat javítástechnikai okok indokolják. Egyrészt gyors és egyszerű a javításuk. Másrészt a feltett kérdésre a válasz nem mindig adható meg olyan egyszerű formában, hogy a javító egyetlen szempillantás alatt megállapíthassa, hogy az jó-e vagy sem, ezért kész kifejezéseket kínál fel megoldásként.

Egy ilyen módon összeállított felmérő dolgozattal elemi tudáselemek meglétére vagy hiányára tudunk következtetni, de alkalmatlan arra, hogy többlépéses eljárások, algoritmusok hibáit tárja fel, vagy fogalmak, tételek ismeretét mérje fel. A szintfelmérőnek az előbbi a célja. Az eredmények ismeretében aztán a hallgató dönti el, hogy felveszi-e a felzárkóztató kurzust, vagy megpróbálja az alapvető középiskolai ismeretek hiánya ellenére a matematika tárgyakat abszolválni.

Még egy kérdés vetődött fel a felsőbb éves hallgatók részéről. Hogyan készüljenek az elsőévesek a szintfelmérőre? Adunk-e ki olyan feladatsort, amelyen gyakorolhatnak? A válaszunk az volt, hogy nem adunk ki gyakorlófeladatokat. A szintfelmérőre nem kell készülni. Ez a dolgozat egy pillanatnyi matematikai tudásszintet kíván mérni. A célirányosan „olyan feladatok begyakorlása, amilyenek várhatók”, hamis képet adhat a valódi tudásról. Másrészt semmilyen hátrányos következménye nincs, ha a hallgatónak nem sikerül jól a dolgozat. A vártnál jobban sikerülő dolgozat abba a hamis illúzióba ringathatja az íróját, hogy nincs olyan nagy baj a matematikai tudásával, hogy felzárkóztató kurzusra kelljen mennie.

## Összefoglaló

Írásomban a tavalytól újra bevezetett, új formába öntött szintfelmérő dolgozatot mint mérőeszközt tekintettem, mely arra hivatott, hogy az egyetemünkre felvett új elsőévesek középiskolai matematikai ismeretanyagának egyes tudáselemeit mérje. Ismertettem a dolgozat célkitűzéseit és az összeállításánál figyelembe vett szempontokat. A dolgozatot magát teljes terjedelmében nem közöltem. Összesítve és feladatcsoportonként is elemeztem az eredményeket. Néhány feladat kiemelésével rámutattam az alapvető hiányosságokra és a típushibákra. A dolgozat eredményeit összevetettem a kollégák tapasztalataival azon a téren, hogy milyen matematikai hiányosságokat látnak hallgatóink körében. A dolgozat eredményei és a sokéves tapasztalat nagyban egyezett. Végül értékeltem a dolgozatot, és megállapítottam, hogy ebben a formában alkalmas az egyetemünkre bekerülő elsőévesek középiskolai matematikai tudásszintjének felmérésére.

doi:10.20312/dim.2023.07

# Matematika tanár szakos hallgatók oktatási készségeinek hallgatóközpontú fejlesztése mikrotanítási környezetben

**Dr. Polgár Rudolf**
ELTE IK
polgar.rudolf@sek.elte.hu

**Bálint Boglárka Eszter**
ELTE SEK BDPK matematika-angol szakos tanár hallgató
boglarkaeb@student.elte.hu

**Horváth Anna**
ELTE SEK BDPK matematika-történelem szakos tanár hallgató
thoran@student.elte.hu

**Király Tamás**
Soproni Egyetem CJFTDI doktorandusz
tamas.kiraly1990@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. A készség- és tananyagfejlesztési projekt ötletét az adta, hogy a tanár szakos hallgatók egy kvázi valós helyzetben tehessenek szert tanítási tapasztalatra mind verbálisan, mind írásban. Egyúttal a mikrotanítás alatt elkészült tananyagok rendezett módon egy webes digitális példatár alapját képeznék, amely általános iskolától a középiskoláig a diákoknak, tanárokoknak segítséget nyújthat az anyagrészek feldolgozásában. A kurzusokon a tanárjelöltek megtanulnak szakmailag precízen és tömören fogalmazni, gyakorlatot szereznek tantermi táblán írás- és rajzkészségre.

ABSTRACT. The fundamental idea of the skill and study material development project is that students in teacher training programmes get the chance to gain teaching experience in realistic situations, verbally, and in writing. Also, the study materials made during the micro-teachings are to be the basis of a digital collection of exercises, that provide help for students and teachers from primary to secondary school. On the courses the trainee teachers learn how to speak and word tasks professionally, precisely, and succinctly, and improve their skills in writing and drawing on blackboard.

## 1. Bevezetés

A bemutatásra kerülő készség- és tananyagfejlesztési projektet az elmúlt három szemeszter tapasztalatainak figyelembevételével mutatjuk be, amit az ELTE SEK BDPK matematika szakos hallgatók részére tartott kurzusokon szereztünk.

A kurzus ötletét az adata, hogy a tanár szakos hallgatók egy kvázi valós helyzetben tehessenek szert tanítási tapasztalatra mind verbálisan, mind írásban. Tanuljanak meg szakmailag precízen és tömören fogalmazni, gyakorlatot szerezzenek tantermi táblán írás- és

rajzkészségre (olvasható táblakép), illetve mindezt úgy kell megvalósítani, hogy az elmondott és leírt tananyag otthon is újratanulható legyen majd diákjaik számára.

Ezek mellett meg kell tanulni az elmondottakat értékelni, ami leendő munkájuk során a szóbeli és írásbeli számonkéréseknél feladatuk lesz. A kurzuson az önkritikának is el kell hangzania, a hallgatótársak és az oktató kritikáját meg kell hallgatni, és érdemi választ kell adni. A kritikának mindig valósnak és jobbító szándékúnak kell lenni.

A mai felgyorsult világban nehéz lépést tartani a fiatalabb generációk igényeivel. Mások az elvárásaik, az elképzeléseik és a szükségleteik, mint a szüleiknek vagy a tanáraiknak volt. Ezt figyelembe véve és ehhez próbálva alkalmazkodni határoztunk úgy a projektmunkák kezdetekor, hogy eltérünk a hagyományos formáktól. Egy olyan matematikai példatár elkészítése mellett döntöttünk, ami igyekszik kielégíteni a mai gyerekek által támasztott követelményeket, így például segítségül hívja a különböző közösségi platformokat, amivel gyorsabb elérést, közvetlenebb kapcsolatot biztosít, és formátumát tekintve is könnyebben emészthető.

Egyúttal, az általunk fejlesztett digitális tananyag célja segítséget nyújtani az általános iskolától egészen a verseny szintű matematikáig, elsősorban példafeladatok megoldásán keresztül. Ez nem helyettesíti az iskolai oktatást, helyette egyfajta külső, otthoni támogatást nyújt, amihez bármikor van lehetőség fordulni. Emellett a témakörökhöz szeretnénk idővel készíteni egy kiegészítő blokkot is, amiben be tudjuk mutatni, hogy az adott fejezetben tanultakat az élet mely területén tudja később kamatoztatni a hallgató.

## 2. A kurzus célja

Részletesebben, a kurzus célja összetett:

1. mint egyetemi kurzus: a tanárszakos hallgatók, mint leendő tanárok óraadói készségnek fejlesztése: tábla előtti szereplés, rajzok-grafikonok és megfelelő táblakép megvalósítása, összefüggő és szakszerű szöveghasználat, mely alapján a diákok számára otthon is újratanulható a leadott tananyag.

2. mint iskolai digitális tananyag készítés: a hallgatóknak egy adott tananyag önálló feldolgozása, minipéldatár szerkesztése az általános iskolai feladatoktól az emelt szintű érettségin szereplő - versenyszintű példákig. A példákat a kurzus keretében tábla előtt kell bemutatniuk, melyekről videófelvétel készül (pl. panopto).

Oka kettős:

a) mint online elérhető tananyag: egyrészt az elkészített videók egy létrehozandó digitális adatbázis részét képezik, mely az otthoni tanulást segítheti az általános és középiskolás diákoknak. Terveink szerint létrehoznánk egy tudományági (matematika) strukturált adatbázist: a tudományág részágakra, majd azok logikailag szétbontható csoportjain keresztül feldolgozásra kerülne minden témakör, amellyel tanulmányaik alatt a diákok találkozhatnak. A strukturált hálón könnyen lehetne mozogni témakörök között, ami elősegítheti komplex gondolkodást igénylő feladatok megoldhatóságát.

b) mint a tanárjelölt egyik leendő fontos feladatának előkészítése – diák értékelése, osztályozása: másrészt a videók visszajátszása során elemzésre kerül a tanárjelölt szereplése, melyre önkritikát kell gyakorljon, a tankör társai észrevételeket tesznek, illetve amelyet a kurzus oktatója is véleményez (kritika és értékelés meghallgatása és feldolgozása - mint jobbító szándékú visszajelzés).

3. mint a jelen és leendő általános és középiskolások generációs tulajdonságainak figyelembevétele a digitális anyagok elkészítésénél: a minipéldatárat azzal a kitűzött szempontok alapján kell megvalósítaniuk (logikai sorrend, egymásra épülés, teljesség). A példákból készült videók elkészítése során az egyik legfontosabb szempont, hogy leendő

tanulók, a generációjuk tulajdonságait figyelembevéve – pl. rövid koncetrációs idő – úgymond rövid, 3 perc alatt komplex információkat kapjanak:

- mi a feladat?
- hogy kell megoldani?
- miként lehet a megoldás helyességét ellenőrízni?
- milyen alternatív megoldási lehetőségek vannak?

4. mint más tudományok esetén való alkalmazhatóság: a matematikatanár szakos hallgatókkal közös projekt tapasztalatait felhasználva célunk egy olyan oktatási módszertant kidolgozni, amely más tudományágak is hasznosítani tudnak az előző pontokban foglalt főbb célok mentén: tanár szakos hallgatók felkészítése a tanári pályára, online elérhető digitális tananyagok létrehozása struktúrált formában, a generációs tulajdonságok beépítése.

## 3. A kurzuson részt vevő hallgatók észrevételei

A videók elkészítése egyszerre a legnehezebb és legérdekesebb része is a munkánknak.

Minden felvételnek van egy általános menete, ami témakörönként némiképp eltérhet egymástól. Először ismertetjük a feladat szövegét, amit meg kell oldanunk, ezeket többnyire magunk – a feladatban részvevő tanulók – keressük, illetve írjuk meg előzőleg otthon. Ezután következik egy gyors adatlejegyzés, ahol figyelnünk kell arra, hogy minden érthetően, olvashatóan kerüljön fel a táblára. A feladatmegoldása és maga a számítás a legérzékenyebb része a műveletnek. Pontosan tudnunk kell, hogy mit akarunk elérni és ezt hogyan magyarázhatjuk el úgy, hogy egyrészt a néző számára is könnyen emészthető maradjon, másrészt pedig szakmailag is megfelelő legyen. Ha ezzel is végeztünk, akkor következik a válasz és egyéb megoldási lehetőségeknek az ismertetése – amennyiben a feladat esetén van ilyen.

A leírtakról mindenkinek egy hétköznapi tanórai feladat megoldás juthat eszébe, ami nem is áll távol a valóságtól. A különbség annyi, hogy számunkra mindössze két-három percnyi időkeret jut, amiben meg kell ragadnunk a gyerekek figyelmét az iskolán kívül. Illetve a videó leforgatása után még kapunk egy visszajelzést a többiektől, valamint magunkat is lehetőségünk van újra megnézni. Ezek által a kritikák által pedig képesek vagyunk észlelni a hibáinkat és kijavítani azokat, hogy a jövőben ne kövessük el azokat. Jelen dolgozatom célja nem több, mint bemutatni milyen területeken van lehetőségünk fejlődni azáltal, hogy részt vehetünk egy ilyen projektben. Szeretnék rámutatni a kritika hasznosságára és arra, mennyire fontos lenne hasonló jelleggel, de kissé talán más formátumokban kiterjeszteni ezt a fajta oktatási módot más tantárgyakra is a tanárképzésben.

Egy feladatsor összeállítása kezdetben nehéz és nem is szokott menni elsőre a többségnek. Az esetek jelentős részében inkább hagyatkozunk már megalkotott vizsgák feladataira ahelyett, hogy magunk kezdenénk kitalálni valami újat. Ennek okára talán a legkézenfekvőbb válasz, hogy nem vagyunk biztosak magunkban, a képességeinkben és nem rendelkezünk megfelelő tapasztalattal. Egy kezdő tanár ugyanezzel a problémával találkozhat, amikor először szeretne dolgozatot íratni egy osztályban. A példatár alkotása közben ezek a nehézségek és bizonytalanságok már az egyetemi évek alatt felszínre kerülhetnek és kis gyakorlással orvosolhatók.

A feladványok kreálásakor pontosan tudnunk kell, hogy mit szeretnénk bemutatni vagy számonkérni. Ennek megfelelően kell megfogalmaznunk és variálnunk a felhasználható összefüggések tárházát. Ismernünk kell az alkalmazható stratégiákat, ügyelnünk kell rá, hogy legyen – a feladat szempontjából – helyes megoldása a példának és nem utolsó sorban a szövege

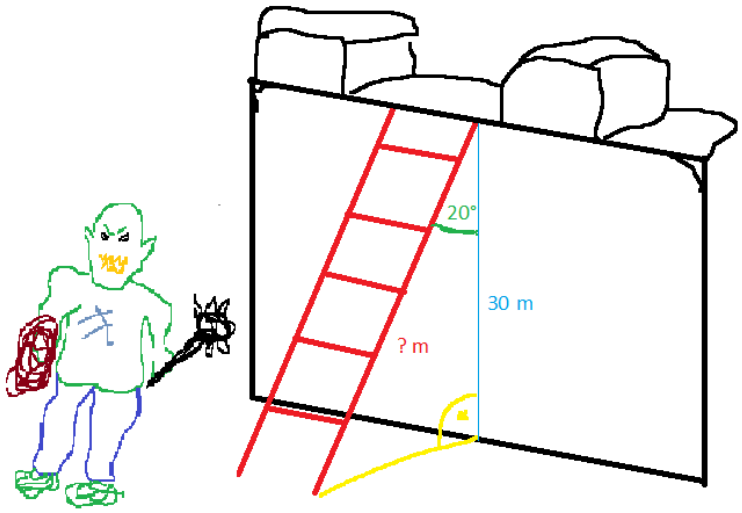
a tanuló számára reálisnak hasson. Külön előnyt jelentenek az olyan irományok, amik a diákok érdeklődési köreivel közeli kapcsolatban állnak.

Példa: Egy derékszögű háromszög egyik befogója 30 méter. Milyen hosszú a másik két oldala, ha a megadott befogó és az átfogó által meghatározott szög 20°-os?

avagy

Segítsünk az orkoknak! Létrákat készítenek Minas Tirith ostromához, de nem tudják milyen hosszúakat kellene készíteniük. A fal, amin át kell mászniuk 30 méter magas. Tudjuk azt is, hogy a létráknak legalább 20°-os szöget kell bezárniuk a fallal ahhoz, hogy stabilan megálljanak (1. ábra). Milyen hosszú létrákat építsenek az orkok, és milyen messze támasszák le őket a faltól, hogy fel tudjanak mászni rajta?

Tanárként fontos célunk lenne, hogy a gyerekek érdeklődését képesek legyünk felkelteni és fenntartani. Ezt elősegíthetjük már a feladatok megfogalmazásánál is, ahogy a fenti példa is mutatja.




**1. ábra**

## Összefoglaló

A felvételek készítése és visszajátszása által a tanárszakos hallgatóknál könnyebben elemezhető az adott „mini tanóra”: táblakép, olvashatóság, érthetőség, szakmailag korrekt fogalmazás használata.

A „mini tanóráról” önkritikát és kritikát kell adni, mely a hallgatók leendő tanári munkájában a diákjaik értékelésénél lesz fontos szerepe. A kritikáknak objektívnek kell lenni, meg kell tanulni, hogy ez nem lehet sértő, ennek segítő szerepe kell legyen.

A kurzuson 2-5. évfolyamos hallgatók vettek-vehetnek részt. Nagyon fontos része az egymástól, saját korosztályuktól való „tanítani tanulás”. A közös kurzus egyben elősegíti az évfolyamközi kommunikációt és tapasztalatcserét is.

A tananyag (helyes, precíz, tömör megoldások) digitális feldolgozása, a strukturális felépítés és az adatbázis létrehozása mellett fontos szerepet kapnának a „baki videók”. A „helyes” megoldásokat bárki számára elérhetővé tennénk (hallgatók, oktatók, diákok), míg a „baki” videók csak a tanárképzésben részt vevő hallgatók és oktatók számára, mint módszertani tanulságok szolgálnának.

doi:10.20312/dim.2023.08

# Az ellipszis-rögzítés általános esete

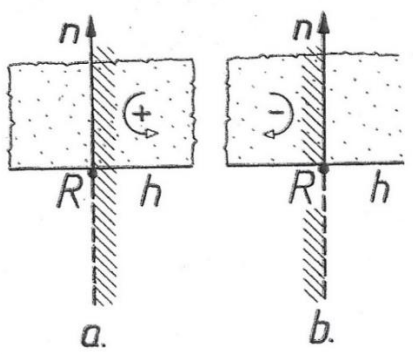
**Hajdu Endre**
Soproni Egyetem

ÖSSZEFOGLALÓ. A geometriai rögzítés második típusának és az ellipszis rögzítésének rövid ismertetése egy speciális esetben. A három ponttal rögzítés általános esetében a rögzítési centrum azonos a rögzítési pontok alkotta háromszög Fermat-pontjával.

ABSTRACT. It is a short presentation of the second kind of geometric fixing and fixing the ellipse in a special case. Applying the three point fixing in the general case, the centre of fixing is the Fermat-point of the triangle formed by the three fixing points.

## 1. Bevezetés, alapdefiníciók

Ez a dolgozat a szerző korábbi [1] írásához csatlakozik, mely a rögzítés-geometria alapfogalmainak ismertetése után, az ellipszislemez másodfajú rögzítésének egy különleges lehetőségét tárgyalja. A témakör irodalmának szűkössége miatt indokoltnak tűnik az előző dolgozatban ismertetettek rövid felidézése; az alakzatok mozgathatóságának kizárása, azaz rögzítése, fixnek tekintett pontokból álló rögzítő pontrendszerrel is lehetséges. Ha az alakzatnak csak eltolásait zárja ki a rögzítő pontrendszer, elsőfajú rögzítésről beszélünk, ha az alakzat elforgatásait zárja ki, akkor másodfajúnak mondjuk a rögzítést, mely esetleg kizárja az alakzat eltolásait is. Mindkét fajta rögzítésmód esetében legalább annyi pontból kell állnia a rögzítő rendszernek, amennyi elegendő a mozgásfajta kizárásához. Másodfajú rögzítés esetén egy síkalakzat, pl. egy sokszöglemeznek az elforgatását már egyetlen rögzítő pont korlátozza; a lemez $h$ határ egyenesén (szakaszán) elhelyezett $R$ rögzítő pont kizárja mindazokat a pozitív irányú elforgatásokat a síkban, melyek centruma az $n$ támasz egyenestől jobbra vannak (1. ábra).




**1. ábra**

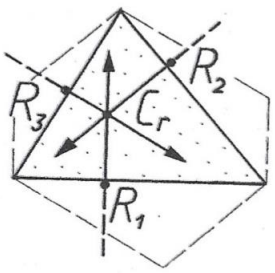
Az $n$ határ egyenesű félsík pontjai alkotják a pozitív forgásirányú elforgatásokból kizárt centrumok tartományát. A határvonal szaggatott vonallal rajzolt félegyenese nem tartozik a kizárt centrumtartományhoz. A támasz egyenesre tükrözve a pozitív kizárt centrumtartományt,

jutunk a negatív kizárt centrumtartományhoz, melynek pontjai körül a negatív irányú elforgatások vannak kizárva. Megmutatható, hogy például egy háromszög-lemez (2. ábra) másodfajú rögzítéséhez legalább három rögzítő pont szükséges, s az eredményes rögzítés feltételei a következők:

I. A támasz egyeneseknek egy (esetleg ideális) pontban kell metsződniük.

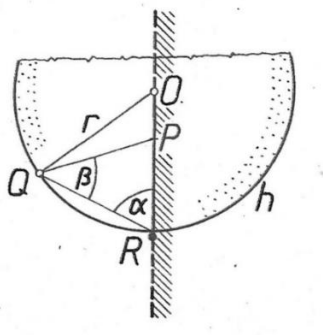
II. Az irányított támasz egyenesek páronkénti hajlászögeinek összege 360°.

III. A támasz egyenesek közös $C_r$ pontjának, a rögzítés centrumának, legalább egy + és egy – előjelű kizárt centrumtartományhoz kell tartoznia.




**2. ábra**

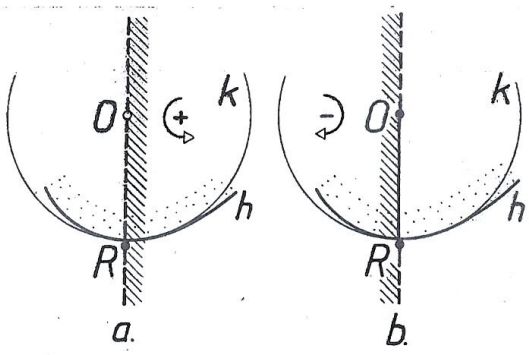
Az olyan rögzítő rendszert, melynek nincs fölösleges (elhagyható) pontja, nevezik primitív rögzítő rendszernek. A háromszög-lemeznek a hárompontos, (centrális) rögzítésen kívül van négypontos primitív rögzítő rendszere is. Az olyan konvex lemezek esetében, melyek pereme (határvonala) nem sokszög, a rögzítés elve azonos a föntebb látottal, vagyis: ki kell zárni az elforgatási középpontokat, a forgáscentrumokat. A kizárt centrumtartományok az ilyen esetekben is félsíkok, de nem azonosak az egyenes peremű lemezek esetére érvényes félsíkokkal, azaz centrumtartományokkal. Ha a lemez $R$ rögzítő pontjának környezetében a határvonal $O$ középpontú körív (3. ábra), akkor a lemez $P$ pontja körül a lemez nem forgatható el úgy, hogy $PQ$ szakasz $Q$ pontja az $R$ „fölé” kerüljön, mivel $\beta < \alpha$ miatt a $PQR$ háromszögben az $R$ csúccsal szemben lévő oldal nagyobb, mint a $Q$-val szemben lévő. Ennek alapján: ha a peremnek a rögzítő ponttal szomszédos pontját támasztási pontnak nevezzük, akkor az $O$ - tól a támasztási pontig terjedő szakasz pontjai $O$ kivételével kizárt centrumok; az ábrán sraffozás jelzi, hogy a + forgásirány szempontjából az $OP$ egyenes által határolt (jobbra eső) félsík a kizárt centrumtartomány, melyhez nem tartozik egy $O$ kezdőpontú és egy $R$ kezdőpontú félegyenes.




**3. ábra**

Ha a perem simulóköre a rögzítő pont környezetében átmetszi a peremet (4.a ábra), akkor az $O$-tól $R$-ig terjedő szakasz pontjai nem tartoznak a + kizárt centrumtartományhoz. A 4.b ábra

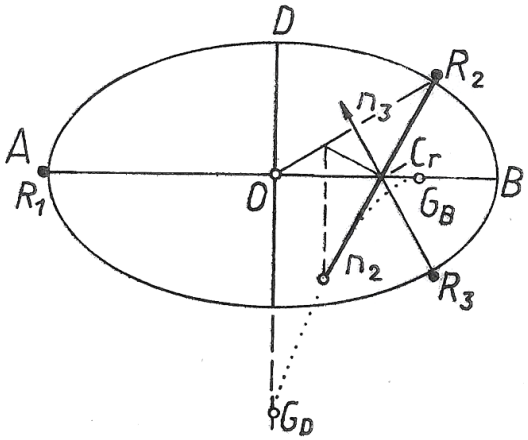
a negatív kizárt centrumtartományt szemlélteti, mely esetben az említett *OR* szakasz a kizárt negatív centrumtartomány pontjaiból áll.




**4. ábra**

## 2. Ellipszis rögzítése

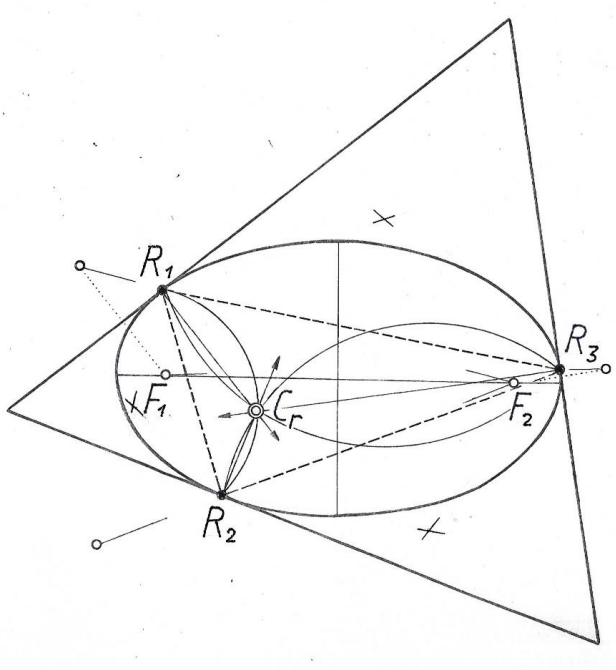
A részben vagy egészében görbe peremű lemezek hárompontos rögzítésével is foglalkozó [1]-ben, az ellipszist rögzítő egyik pont a görbe nagytengelyének végpontja (5. ábra), s a $C_r$ rögzítési centrum is az említett tengelyen van.




**5. ábra**

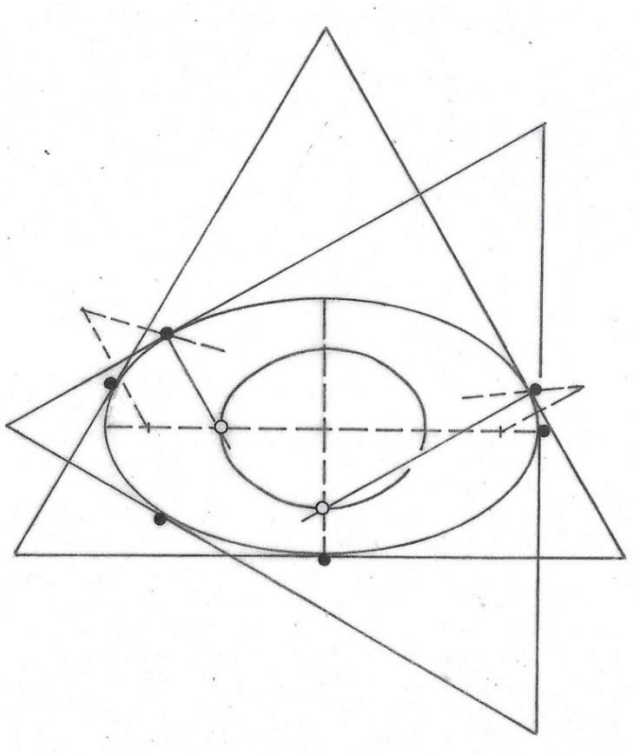
Abban az esetben nem jelentett problémát a további két rögzítő pont kijelölése, vagyis a megfelelő ellipszis-normálisok megszerkesztése; azonban az ellipszis valamely tetszőleges belső pontja nem tekinthető rögzítési centrumnak. Van lehetőség ennek a nehézségnek megkerülésére. Az ellipszis köré írt szabályos érintő háromszögek szerkesztése során a háromszög-oldalak és az ellipszis érintkezési pontjaihoz tartozó normálisok egy pontban metszik egymást (6. ábra); ennél fogva mivel a normálisok páronként 120°-ot zárnak be egymással, a normálisok közös pontja az érintéspontok alkotta háromszögnek Fermat-pontja.

Ahhoz, hogy a normálisok közös pontja $C_r$ pont, be kell látni, hogy teljesülnek a másodfajú rögzítés feltételei. Az I. feltétel azért teljesül, mert az $R_1$ és az $R_2$ rögzítő pontokhoz tartozó támasz-normálisok egymással bezárt szögéről tudjuk, hogy az 120°, tehát a két egyenes metszéspontja rajta van egy ekkora látószöghöz tartozó látóköríven. Az $R_2$ és $R_3$ majd az $R_3$ és $R_1$ egyenespárok metszéspontjai ugyancsak egy-egy látókörön keresendők, ezért a szerkesztés annak a háromszögnek a Fermat-pontját eredményezi, melynek csúcsai az ellipszis köré írt szabályos háromszög érintés-pontjai, vagyis a rögzítő pontok. A II. feltétel ugyancsak teljesül, mert a támasz-normálisok a szabályos érintő háromszög oldalaira merőlegesek, ennél fogva a szögfeltétel biztosítva van. Mivel – például – $R_1$ és $R_2$ az ellipszis nagytengelyének különböző oldalára esnek, a görbületi viszonyokat figyelembe véve és a 4. ábrával kapcsolatos megállapítások alapján a $C_r$ rögzítési centrum az $R_1$ + előjelű kizárt centrumtartományba esik, míg $R_2$ az ellenkező előjelűbe, és minden szabályos érintő háromszög esetében található a nagytengely különböző oldalán lévő rögzítő pontpár, ezért a III. rögzítési feltétel is teljesül.




**6. ábra**

Megemlítendő, hogy az ellipszist érintő szabályos háromszögek egy adott ellipszis esetében is különböző méretűek, a különböző körülírt szabályos érintő háromszögekhez tartozó $C_r$ pontok egy másik ellipszist alkotnak, melynek tengely-végpontjai a 7. ábrán látható szerkesztéssel nyerhetők.



**7. ábra**

## Irodalomjegyzék

[1] **Hajdu Endre.**: Ellipszislemezek másodfajú rögzítése, (2023). https://www.galgoczi.net/HE_anyagok/ELLIPSZISLEMEZ%20%20MASODFAJU%20%20ROGZITESE.pdf
[2] **Czédli G.** – **Szendrei Á.**: Geometriai szerkeszthetőség. Polygon, 1997.
[3] **Tomor B.**: Konvex alakzatok egy rögzítési problémája. Matematikai lapok (1963).
[4] **Hajdu E.**: Konvex sokszöglemezek elsőfajú rögzítése. Dimenziók X. (2022), 81–86. doi:10.20312/dim.2022.08

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
XI. kötet, 2023 77–82

doi:10.20312/dim.2023.09

# Érdekes matematikai problémák modellezése számítógéppel középiskolásoknak

**Sándor Zsuppán**
Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium
zsuppans@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Ebben a rövid jegyzetben azt vizsgáljuk néhány konkrét példa alapján, hogy lehetséges-e érdeklődő középiskolás diákoknak a matematika tananyagot a középiskolás szintet meghaladó matematikai problémákkal kiegészíteni számítógépes segítséggel.

ABSTRACT. In this short note we investigate via some examples the possibility of extending the mathematics curriculum of high school pupils with interesting extracurricular mathematical problems utilizing computational modelling.

## 1 Bevezető

Néhány konkrét példán keresztül azt vizsgáljuk, hogy lehetséges-e a középiskolai matematika tananyagot a kerettantervi követelményeken túlmutató érdekes témákkal kiegészíteni, tovább segítve ezzel a diákok kompetenciáinak fejlesztését. Egy ilyen téma feldolgozása során figyelni kell arra, hogy a diákok már rendelkezzenek a témához minimálisan szükséges matematikai, idegen nyelvi és informatikai (újabban digitális kultúra) ismeretekkel. Egy ilyen téma feldolgozásának több szintje képzelhető el. A legegyszerűbb, hogy tanórai keretben megnézünk egy rövid videót és irányítottan megbeszéljük a tananyaghoz való kapcsolódását. A jobban érdeklődők vagy emelt szintű csoportban tanulók számára lehet nem kötelező házi feladatként adni, hogy nézzenek utána néhány kulcsszónak a megfelelő internetes forrásokban (pl. Wikipedia, Youtube stb.), saját maguk is próbálják a látottakat – esetleg célszerűen leegyszerűsítve – reprodukálni. Ennél is magasabb szinten az előző felderítő munka folytatásaként összefoglalhatják az egyéni tapasztalataikat egy kisebb lélegzetű projektmunkában. Sőt, a legmagasabb elvárható szinten továbbgondolhatják a megfigyelteket, saját kérdéseket tehetnek fel és válaszolhatnak meg önálló vagy irányított kutatómunka keretében. Mivel az ilyen kiegészítő témákban nem várható el középiskolás diákoktól a szakirodalmi szintű bizonyítások, levezetések kigondolása, ezért nagy szerepet kaphat a számítógépes modellezéssel támogatott projektmunka. Itt gondolhatunk bármelyik programra, amivel az informatika keretében a diák megismerkedik, pl. Excel, Geogebra, Python stb. Mivel a legtöbb internetes forrás idegen nyelvű (legfőképp angol), ezért az ilyen témák feldolgozása közben fejlődik a diák idegen nyelv ismerete is.

Ezen rövid jegyzetnek nem célja, hogy teljes körű módszertani javaslatokat tegyen, csak néhány példán keresztül illusztrálja a bevezetőben felvetett lehetőséget.

KULCSSZAVAK. számítógépes modellezés, matematikai problémák, középiskolások
KEYWORDS. computational modelling for secondary school pupils, mathematical problems

## 2 Néhány példa

Az első példa a középiskolai matematikában az utóbbi években egyre nagyobb teret nyerő statisztikával kapcsolatos és egy a mindennapi számhasználat során előforduló érdekes jelenséget ír le. Kiterjedt megfigyelések szerint bizonyos tulajdonságú, számokat tartalmazó adatsokaságban a számok legelső számjegyének eloszlása nem a nagyon gyakori egyenletes vagy normális eloszlásokat követi, hanem a Benford-törvényt, ld. [8], [11]. A jelenség feldolgozását érdemes pl. az "ARTEde" YouTube csatorna [1] rövid videójának megnézésével kezdeni (de van több jó videó is a YouTube-on), majd csak ezután folytatni a fent idézett Wikipedia cikkekkel. A diákok ezután egy rövid projekt keretében megvizsgálhatnak egy bizonyos számadat-halmazt (pl. áruházi árkatalógus mint az 1. képen) és megfigyelhetik, hogy az általuk vizsgált adatok illeszkednek-e a Benford-törvény szerinti eloszláshoz. Ehhez persze előzetesen szükség van a logaritmus ismeretére is, azaz ez a projektmunka legkorábban 11. évfolyamon végezhető el, de ekkora már a diákok megfelelő szintű felhasználói ismeretekkel rendelkeznek valamely táblázatkezelő alkalmazásban, amivel tetszetős kivitelezésben készíthetik el a projektmunkájukat. Egy ilyen projekt, annak ellenére, hogy nem túl nagy erőbefektetést igényel,

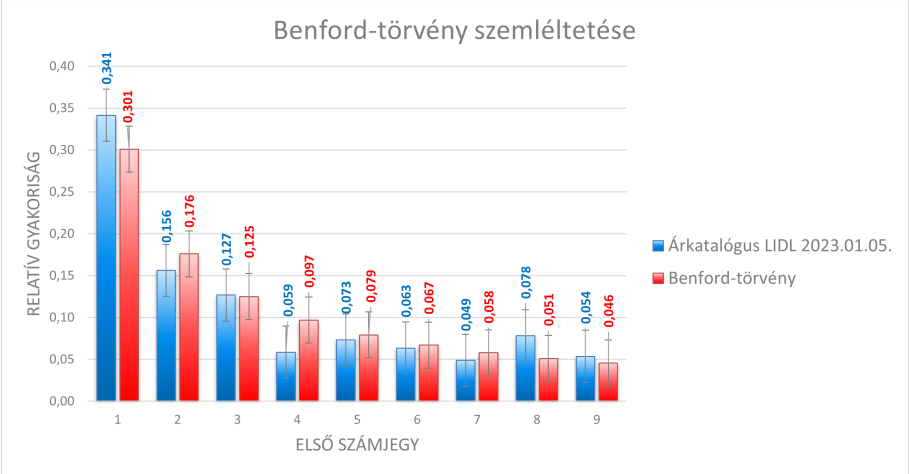



Figure 1: Benford-törvény szemléltetése

eredményével a diákok szemében jól alátámaszthatja a statisztika mindennapi alkalmazhatóságát. Sőt, ezen téma feldolgozásakor szót ejthetünk arról is, hogy vannak fontos esetek, amikor fenntartásokkal kell kezelni egy statisztikai törvényből kapott eredményt, ld. pl. [6].

A második példát is érdemes egy rövid videóval felvezetni, ami a "Numberphile" YouTube csatorna kínálatában található [4] film. Ez tulajdonképpen egy mindenki számára jól követhető feldolgozása a [3] szakcikknek, amely a kétszülős leszármazás egy egyszerű matematikai modelljét tárgyalja. Ebben kiindulunk egy adott számú egyedet tartalmazó populációból (a nulladik generáció) és egy ugyanannyi egyedet tartalmazó szülő populációból (az első generáció). Majd minden nulladik generációs egyed véletlenszerűen választ magának két szülőt az első generációból. Ezután ezt a folyamatot ismételjük tovább egyre több felmenő generációt képezve. A folyamat akkor áll le, amikor megjelenik egy olyan felmenő generáció, amelyben minden egyed vagy leszármazási kapcsolatban van (azaz ős) minden nulladik generációs egyednek vagy nincs a nulladik generációban egyetlen leszármazottja sem (ez lesz az univerzális ősök generációja). Ezen cikk fő eredményét illusztrálja a [12] weboldalon olvasható, képletektől mentes, a témát történelmi kapcsolódáson keresztül bemutató írás, sőt ehhez kapcsolható még a [5] cikk is, amely biológiai-genetikai információkkal egészíti ki a témát. Természetesen a

Wikipedia-n is találhatunk kapcsolódó cikkeket, ld. [9], [10]. Tanórai feldolgozása több szinten is lehetséges. Legegyszerűbb esetben (akár már 9. évfolyamon) használhatunk dobókockákat mint a fent hivatkozott videóban, de nem szükségszerűen 6-oldalút, hiszen kereskedelmi forgalomban elérhető 4, 10, 12 és 20 oldalú is. Páros- vagy csoportmunka keretében játékosan előállíthatunk ilyen leszármazási gráfokat, majd az eredményeket összehasonlítva megfogalmazhatunk megfigyeléseket. A közös ősök megjelenésére adott [3]-beli eredményeket azonban csak 11. évfolyamon, a logaritmus ismeretében, megfelelő statisztikai szemléletmód birtokában és a valószínűség fogalmának alaposabb megértése után érdemes feldolgozni. Ekkor már nem dobókockával érdemes a szimulációt végezni, hanem jobb azt programmal megvalósítani, egyszerűbb esetben a forráskódot a diákok rendelkezésére bocsátva, de esetleg egy tehetségesebb diák maga is megtervezheti a kódot. Kis programozási ismeret birtokában is lehet már nagyon tetszetős, mégsem triviális ábrákat-elemzéseket csinálni mint pl. a 2. és 3 képeken. Megvizsgálható, hogy [3] cikkben az univerzális közös ősök megjelenésére vonatkozó elméleti

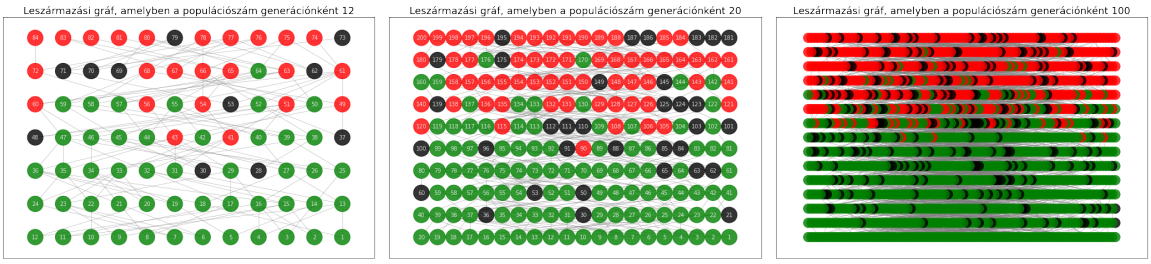



Figure 2: Leszármazási gráfok különböző méretű populációk esetén

Figure 3: Univerzális közös ősökkel és kihalt vérvonalakkal kapcsolatos elemzések

jóslat hogyan egyezik a szimulációval (ld. 3. ábra balra és középen). Vagy például megfigyelhető, hogy míg a felmenő generációkban az univerzális közös ősök száma növekedik, addig a kihalt leszármazási ágak utolsó egyedeinek száma egy átlagos érték körül ingadozik (ld. 3. ábra középen). Mindenféle elméleti meggondolás nélkül számítógépes segítséggel megvizsgálható, hogy ez az átlagos érték hogyan függ a generációk egyedszámától (ld. 3. ábra jobbra). Persze létezik egy elméleti képlet is, aminek a levezetése szépen példázza a középszintű érettségin is elvárt logikai szita használhatóságát: az egy generációbeli leszármazott nélküli egyedek számának várható értéke eszerint

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \left[ \left(1-\frac{k}{n}\right)^{2n} - \sum_{\ell=1}^{n-k-1} (-1)^{\ell} \binom{n-k}{\ell} \left(1-\frac{k+\ell}{n}\right)^{2n} \right],$$

ahol $n$ jelöli a generációk lélekszámát. (Habár ennek a képletnek a numerikus kiértékelése nagy $n$ esetén ebben a formájában problémás.) Lehetne továbbá egy másik szimulációt programozni,

amelyben a generációnkénti egyedszám változik, meg lehetne vizsgálni a teljes leszármazást megjelenítő gráf számos tulajdonságát, stb: a további vizsgálatokra inspiráló kérdések és projektötletek tárháza szinte kimeríthetetlen. Ez lehetőséget ad a diákoknak saját kutatómunkára, és nem utolsósorban esztétikus eredményt lehet produkálni belőle egy projekt végén. A témának több kapcsolódása is van a matematika kerettantervi és érettségi követelményekhez: halmazok, gráfok, valószínűség, statisztika, logaritmus; sőt mutatja a matematikai modellalkotás adta lehetőségeket más területeken.

A harmadik példa - mint az előző kettő is - az elmúlt években a középiskolai matematika tananyagban egyre hangsúlyosabb szerepet kapó valószínűségszámításhoz, továbbá még a sorozatokhoz, a statisztikához, sőt a függvényekhez is kapcsolódik. Ez a koevolúció Bak-Sneppen modellje [7], amit a megalkotói a [2] cikkben elemeztek. Ebben egy adott számú fajból álló populáció evolúcióját vizsgálják úgy, hogy minden fajhoz hozzárendelnek egy fitnesz értéket a $[0;1]$ intervallumból (jellemezve ezzel a faj életképességét), majd minden evolúciós lépésben kiválasztva a legkisebb fitnesszel rendelkező fajt és a szomszédait, azok fitnesz értékeit véletlenszerűen választott értékekkel cserélik ki. Ez ugyan az evolúció egy egyszerű modellje, de mégis sok tanulságos megfigyelést tehetünk vele: például mennyit növekedik az átlagos faji fitnesz, és ez hogyan függ az evolúciós lépések számától; hogyan csökken a faji fitnesz szórása (azaz mennyire válik homogénebbé a populáció), milyen eloszlást mutat faji élettartam az evolúcióban, stb. Ezek a vizsgálatok egyszerűen kódolhatók, lehet velük kapcsolatosan számításokat végezni, animációkat, diagramokat készíteni, sőt az eredeti modell módosítható új ötletekkel (amit a szakirodalomban persze sokan meg is tettek), emiatt kiválóan alkalmas önálló vagy csoportos projektmunkára. Erről néhány példa a 4. ábrán (van közöttük animációból kiragadott állókép is): Habár az előző példák inkább alkalmazott jellegűek voltak, számos,

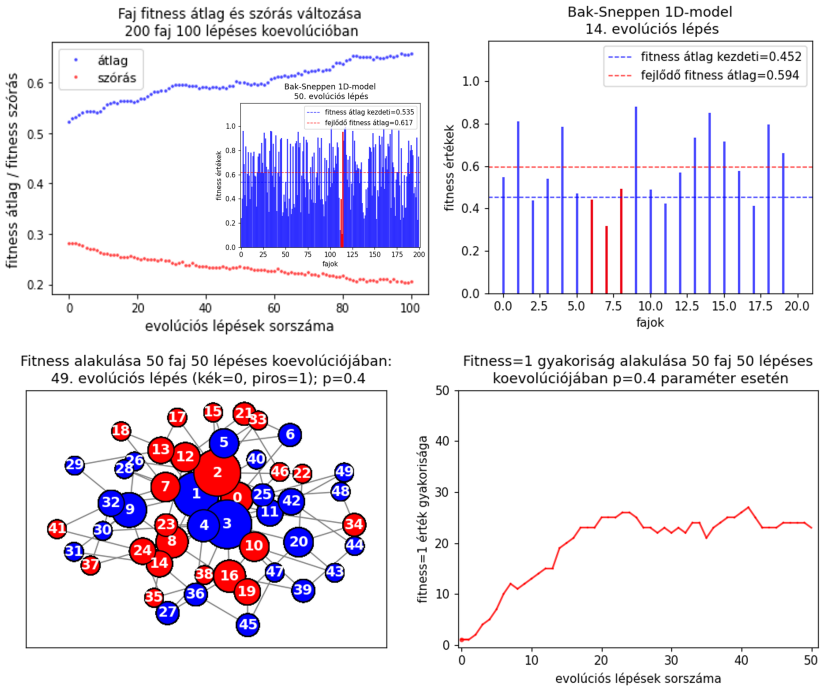



Figure 4: Bak-Sneppen modellel kapcsolatos vizsgálódások

középiskolában előkerülő elméleti matematikai ismeret ugyancsak szemléltethető egyszerűen kódolható programmal. Így feldolgozhatjuk például az RSA kódolási rendszer alapjait képekkel illusztrálva a számelméleti ismeretekhez a 11. évfolyamon mint pl. a 5. ábrákon. A 12. évfolyamon a sorozatok témakörben a kötelező számtani és mértani sorozatokon felül szóba hozható a

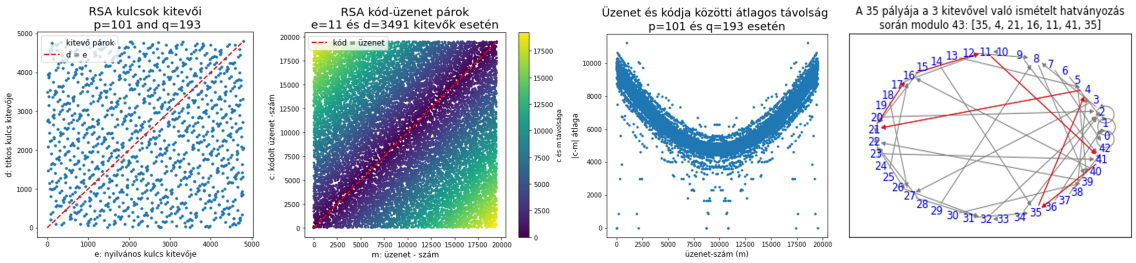



Figure 5: RSA-val kapcsolatos vizsgálódások

logisztikus sorozat viselkedése és ennek kapcsán a káoszelmélet alapjai mint pl. a 6. ábrákon. Csak felvillantásképpen néhány további kép változatos témákban a 7. ábrán: síkbeli ponthalmaz

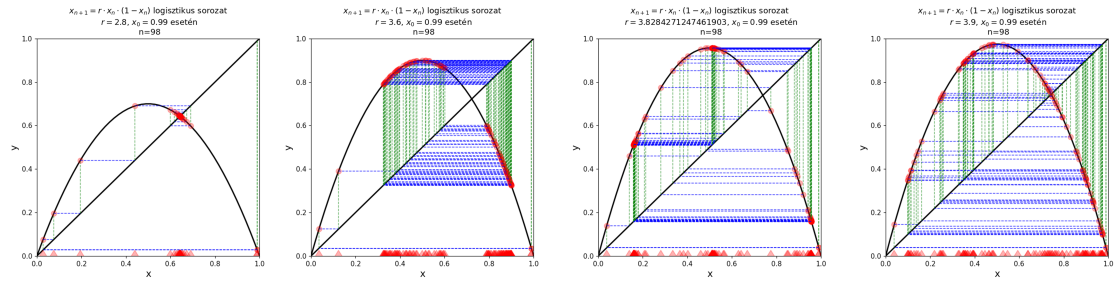



Figure 6: Logisztikus sorozat és káosz illusztráció

Voronoj-diagramja és színezése egy beépített algoritmus alapján a lehető legkevesebb színnel (4 szín elég lenne!) úgy, hogy a szomszédos csúcspontok más színűek legyenek (9. évfolyamon felezőmerőleges és gráfok témákhoz); Cantor-párosítás $]0;1[$-ről egységnégyzet belsejére (9. évfolyamon halmazok számossága témához) és egy véletlen bolyongás egy Erdős-Rényi gráfon animáció utolsó képkockája mellette a gráf csúcspontjainak és a bolyongásbeli csúcspontoknak a fokszámeloszlás összehasonlítása (sok ismeretet igénylő összetett feladat emelt szintű csoportban tanulóknak).

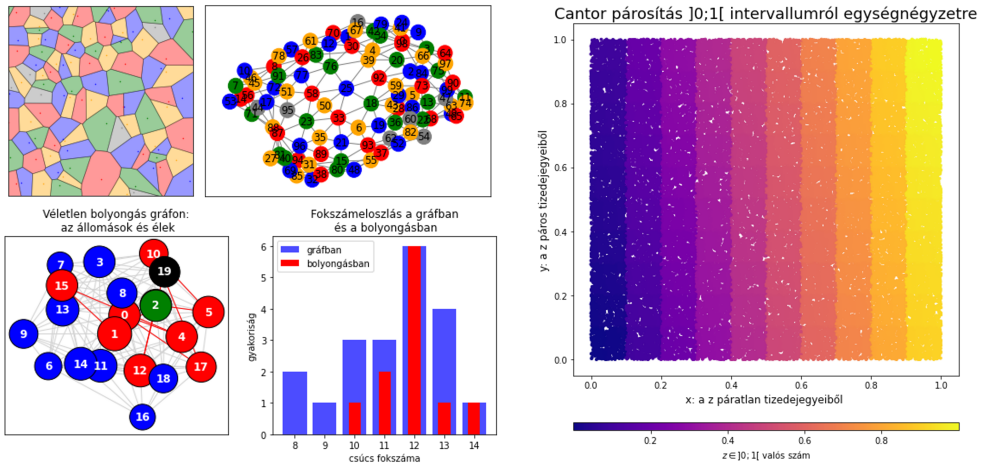



Figure 7: Illusztrációk - Voronoj diagram, gráf színezés, Cantor-párosítás, bolyongás gráfon

### Összefoglalás

Ebben a jegyzetben néhány példát mutattam be, hogy lehetséges a középiskolai tananyag színesítése érdekes, modern matematikai eredményekkel, ha igénybe vesszük a számítógép adta lehetőségeket. Akár csak egy ilyen példa középiskolai feldolgozhatóságának teljes módszertani vizsgálata messze meghaladja egy ilyen írás kereteit, ezért csak ötleteket villantottam fel röviden. Ilyen témák megtalálása nem különösebben nehéz, hiszen sok ingyenes tudomány népszerűsítő oldal létezik a YouTube-on videós (pl. Veritasium, Numberphile, 3Blue1Brown, PBS Infinite Series, ARTEde-Mathewelten stb.) vagy máshol olvasható (pl. QuantaMagazine, Scientific American, Wikipedia stb.) formában. Az ebben a jegyzetben felvillantott és további nagyon érdekes témákkal a szerző is ezen internetes forrásokban találkozott először. A bemutatott képeket a Python programozási nyelv (python.org), a NumPy (numpy.org), a SciPy (scipy.org), a NetworkX (networkx.org) és a Matplotlib (matplotlib.org) felhasználásával a Jupyter Notebook (jupyter.org) környezetben készítettem.

# Irodalomjegyzék


[1] **ARTEde**: *Eine Frage des Maßstabes*, YouTube, (2021). https://www.youtube.com/watch?v=-cfvaNQFozI&list=PLlQWnS27jXh-t3cHfH8oMr8R3-jMvZJn6

[2] **Bak, P. and Sneppen, K.**: *Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution*, Physical Review Letters, **71** (1993), No. 24, 4083–4086. doi: 10.1103/PhysRevLett.71.4083.

[3] **Chang, J.**: *Recent common ancestors of all present-day individuals*, Adv.Appl.Prob., **31** (1999), No. 4, 1002–1026. doi: www.jstor.org/stable/1428340.

[4] **Numberphile**: *EVERY baby is a ROYAL baby*, YouTube, (2019). https://www.youtube.com/watch?v=Fm0hOex4psA

[5] **Rutherford, A.**: *So you're related to Charlemagne? You and every other living European...*, The Guardian, (2015). https://www.theguardian.com/science/commentisfree/2015/may/24/business-genetic-ancestry-charlemagne-adam-rutherford

[6] **Timár, Á. and Pete, G.**: *Miért nem alkalmazható a Benford-törvény az amerikai választási körzetekre?*, Qubit., (2020). https://qubit.hu/2020/12/09/miert-nem-alkalmazhato-a-benford-torveny-az-amerikai-valasztasi-korzetekre

[7] **Wikipedia**: *Bak–sneppen model*, (2023 (last modified)). https://en.wikipedia.org/wiki/Bak%E2%80%93Sneppen_model

[8] **Wikipedia**: *Benford's law*, (2023 (last modified)). https://en.wikipedia.org/wiki/Benford%27s_law

[9] **Wikipedia**: *Lowest common ancestor*, (2023 (last modified)). https://en.wikipedia.org/wiki/Lowest_common_ancestor

[10] **Wikipedia**: *Most recent common ancestor*, (2023 (last modified)). https://en.wikipedia.org/wiki/Most_recent_common_ancestor

[11] **Wikipedia**: *A számok használatának gyakorisága*, (2023 (last modified)). https://hu.wikipedia.org/wiki/A_sz%C3%A1mok_haszn%C3%A1lat%C3%A1nak_gyakoris%C3%A1ga

[12] **Zimmer, C.**: *Charlemagne's DNA and Our Universal Royalty*, Nat. Geo., (2013). https://www.nationalgeographic.com/science/article/charlemagnes-dna-and-our-universal-royalty